جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسيير

قسم مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنة الأولى

مُحاضراتٌ في مِقياسِ

الإحْصَاءِ الرِّياضِيّ.

المحور الرابع: التوزيعات الاحتمالية (تابع).

الجزء الرابع: المتغير العشوائي المعياري والعزوم.

إعداد الدكتور هاشمي عبابسة.

h.ababsa@univ-biskra.dz

statdesc2018@gmail.com

المحور الرابع: التوزيعات الاحتمالية (تابع).

الجزء الرابع: المتغير العشوائي المعياري والعزوم.

د. **المتغيرات العشوائية المعيارية:**

نفرض أن X متحول عشوائي وأن μ توقعه الرياضي وأن σ انحرافه المعياري. يمكن أن نعرف المتحول العشوائي المعياري المرافق X^* كما يلي:

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

يتميز X^* بخاصية مهمة وهي أن توقعَه الرياضي دائما معدوم وانحرافه المعياري دوما يساوي 1 أي $E(x^*) = 0$ و $\sigma_{X^*} = 1$ ، كما أن X^* ليس له وحدة قياس، حيث يمكن استخدامه للمقارنة بين التوزيعات الاحتمالية المختلفة.

ولذلك فإنه لتحول أي متغير عشوائي إلى متغير عشوائي معياري يكفي فقط ان نعرف توقعه الرياضي وانحرافه المعياري، ثم نستخرج القيم المعيارية المقابلة للقيم العادية بتطبيق قانون استخراج X^* أعلاه.

ه. **العُـــزوم:** يعتبر مفهوم العزم لمتغير عشوائي تعميماً لميزاته العددية وهو نوعان: ابتدائي و مُمركز.

1. **العزم الابتدائي**: لا يختلف مفهوم العزم الابتدائي إطلاقا عن التوقع الرياضي إلا من حيث الدرجةُ التي يرفع إليها المتغير العشوائي X . يرمز للعزم الابتدائي بالرمز $\mathcal{M}r$ ، حيث r عدد طبيعي، ويعرف $\mathcal{M}r$ كما يلي:

- **بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع:** $\mathcal{M}r = \sum_{i=1}^{N} x_i{}^r P_i$
- **بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر:** $\mathcal{M}r = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i{}^r f(x_i) dx_i$

وبشكل عام... العزمُ الابتدائي من الدرجة r لأي متغير عشوائي، متصلاً كان أم منفصلا يحسب كما يلي:

$$\mathcal{M}\mathrm{r} = E(x^r)$$

لاحظ أن : $\mathcal{M}_0 = 1\,, \quad \mathcal{M}_1 = \mathrm{E(x)} = \mu$

2. **العزم المُمركز:** يدعى التوقع الرياضي للمتغير العشوائي $[X-E(X)]^n$ - إن وجد – بالعزم المركز من الدرجة r للمتغير العشوائي X حول توقعه الرياضي E(X) ، يرمز لهذا العزم بالرمز μ_r حيث r عدد طبيعي، أي أن

$$\mu_r = E\,[X - E(X)]^r$$

ومنه فإن العزم المركز يحسب كما يلي:

- ✓ **بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع:** $\mu_r = \sum_{i=1}^{N} P_i\ [x_i - E(x)]^r$
- ✓ **بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر:** $\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^r f(x)dx$

لاحظ أن: $\mu_0 = 1 \quad , \quad \mu_1 = 0 \quad , \quad \mu_2 = V(X)$

3. الدالة المولدة للعزوم: تُعرَّف الدالة المولدة للعزوم $\mathcal{M}_x(\mathrm{t})$ كما يلي:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_x(t) = E\ (e^{tx})}$$

بناءً على ما سبق، فهذا يعني أنه:

- ✓ **بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع:** $\mathcal{M}_x(t) = \sum_{i=1}^{N} e^{tx_i} . P_i$
- ✓ **بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر:** $\mathcal{M}_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \mathrm{f}(x)dx$

نلاحظ أن أيَّ عزمٍ $\mathcal{M}_r$ ليس إلا المُشتقةَ من الدرجة r لهذه الدالة بالنسبة إلى "t"، مع وضع t = 0 في المشتقة المتحصل عليها، وهذا ما جعلها دالةً مولدةً للعزوم.

مثال08: المشتقة الأولى لهذه الدالة هي $\mathcal{M}_1$ بعد وضع t = 0 في المشتقة المتحصل عليها.

$$[\mathcal{M}_{\mathrm{x}}(\mathrm{t})]' = E[(e^{tx})'] = E[xe^{tx}] = E(x) = \mathcal{M}_1$$

وكذلك الحال بالنسبة للمشتقة الثانية التي تساوي $\mathcal{M}_2$ والثالثة التي تساوي $\mathcal{M}_3$ وهكذا (بعد وضع t=0 في كل مشتقة).

نهاية المحور الرابع.