Observateur d'état et commande par retour de sortie des systèmes multi variables

1. INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, on a étudié le problème de la commande par retour d'état en supposant la disponibilité (à la mesure) de toutes les variables d'état. Mais, Souvent pour des raisons de l'indisponibilité technique du capteur, de son coût, etc…, le nombre de grandeurs d'état pouvant être mesurées par des capteurs est inférieur à celui du vecteur d'état (c.-à-d., qu'il y a des grandeurs d'état non mesurables). Dans ce cas la synthèse d'une loi de commande par retour d'état est alors compromise. On pose ainsi le problème de la synthèse d'un algorithme reconstituant le vecteur d'état, sur la base de la connaissance sur un intervalle de temps, d'une part de l'entrée du système et d'autre part de sa sortie (devant être mesurables); c'est le problème de **l'observation.**

Cette reconstitution ou estimation de l'état courant devant faite en temps réel, l'observateur revêt usuellement la forme d'un système dynamique auxiliaire.

2. DEFINITION DE L'OBSERVABILITE

1. Un système est dit observable si, étant donne l'instant t_0, il existe un instant t_1 tel que la connaissance de $y(t_0,t_1)$ et $u(t_0,t_1)$ permette de déterminer de manière unique l'état $x(t_0) = x_0$ et ceci quelque soit l'entrée du système.
2. Un état x_1 est dit reconstructible à l'instant t_1 si, quelque soit $u(t)$, il existe $t_0 \leq t_1$ tel que la connaissance de $u(t)$ et de $y(t)$ avec $t \in [t_0,t_1]$, permettent de déterminer $x_1 = x(t_1)$. Si tout état est reconstructible à l'instant t_1, le système est dit complètement reconstructible.

Donc l'étude de l'observabilité ne dépend que des matrices A et C.

Pour cette raison, on dit parfois que c'est la paire (A,C) est observable.

La paire (A, C) est observable si et seulement si :

$$rang(M_o) = n \quad tel\ que\ M_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

La matrice M_0 est dite matrice d'observabilité

Exemple 1 :

Etudier l'observabilité du système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

On trouve la matrice l'observabilité M_0et on calcule son rang

rang (A)=2 et $M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$

rang (M_0)=rang (A)=2

Le système est observable

Exemple2

Etudier la commandabilité et l'observabilité et du système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

On calcule M_c $\quad M_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

rang (M_0)=rang (A)=2

Matrice singulière donc système non commandable. En effet on a

$\dot{x}_1 = 0.5x_1 \rightarrow x_1$ n'est pas affecté par u ou par x_2

$\dot{x}_2 = -2x_2 + u \rightarrow x_2$ dépend de u

On calcul et $M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$ ce qui donne $M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

rang (M_0)=rang (A)=2

Matrice singulière donc système non observable

3. DEFINITION ET PRINCIPE

On appelle observateur un système dynamique capable de reproduire (ou estimer) les états non mesurables d'un système à partir de la seule connaissance de l'entrée et la sortie du système et éventuellement les états mesurables.

3.1 Observateur en boucle ouverte

Soit le système d'ordre *n* défini par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A * x(t) + B * u(t) \\ y(t) = C * x(t) \end{cases}$$

L'observateur est défini par:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A * \hat{x}(t) + B * u(t) \\ \hat{y}(t) = C * \hat{x}(t) \end{cases}$$

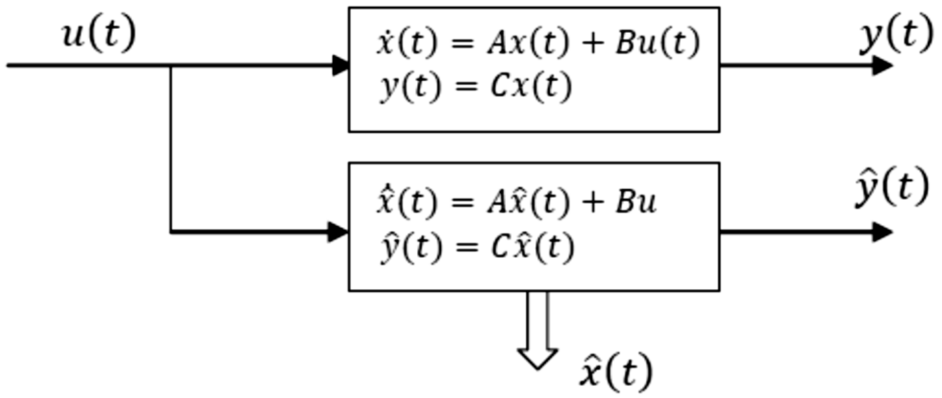

Figure 1 observateur d'état en boucle ouverte.

3.1.1 Erreur d'observation

L'erreur d'observation est

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$
$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) \\ &= A\big(x(t) - \hat{x}(t)\big) = A\, e(t) \end{aligned}$$
$$\Rightarrow e(t) = e(0)e^{A\,t}$$

Si la partie réelle des valeurs propres de A est négative (système stable), alors, l'erreur d'observation converge vers zéro.

Remarque 1 : On remarque que l'observateur et le système ont la même dynamique (ont les mêmes pôles), alors que *la dynamique d'un observateur doit être plus rapide que celle du système* à observer afin de pouvoir l'insérer dans la boucle de commande.

3.2 Observateur en boucle fermée

Soit le système d'ordre n défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A * x(t) + B * u(t) \\ y(t) = C * x(t) \end{cases} \tag{1}$$

L'observateur en boucle fermée est défini par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \tag{2}$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \tag{3}$$

Où $L(y - \hat{y})$ est un terme de correction, L est un vecteur colonne de dimension *n*

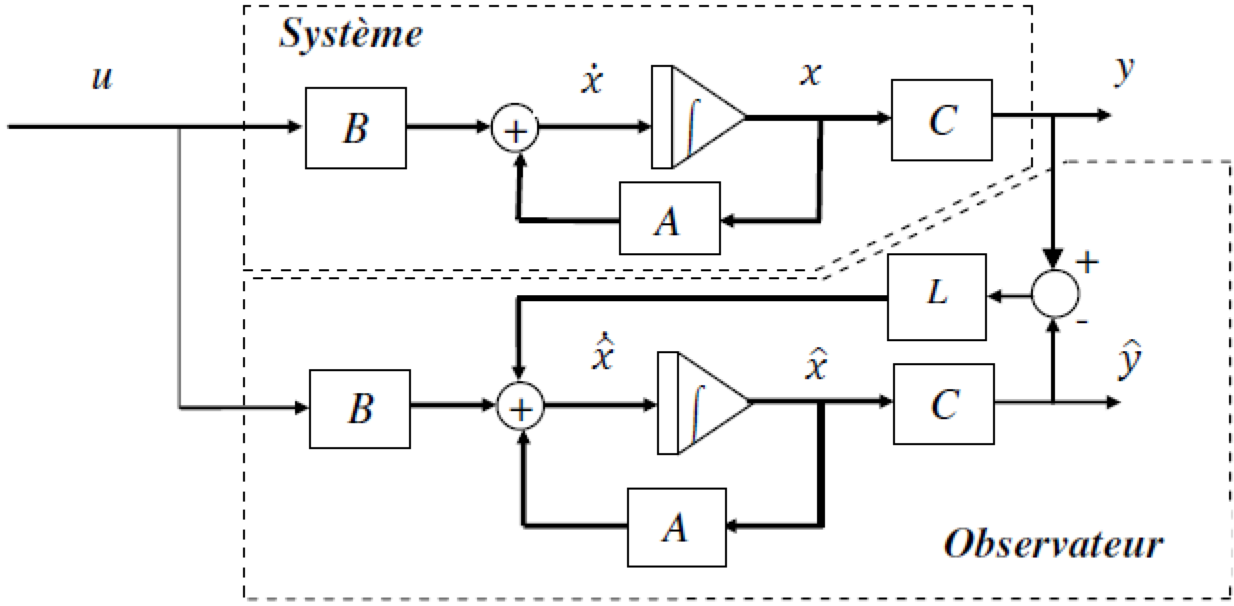

Figure 2 Observateur d'état en boucle fermée.

En remplaçant (3) dans (2) on obtient :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly$$

On remarque que la matrice d'état de l'observateur est $(A - LC)$, donc on peut influencer la dynamique (stabilité et rapidité) de l'observateur en agissant sur le vecteur L (désigné par l'opérateur).

3.2.1. Erreur d'observation

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$
$$\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - L(y - \hat{y})$$
$$\dot{e}(t) = A[x(t) - \hat{x}(t)] - LC(x - \hat{x})$$
$$\dot{e}(t) = \underbrace{(A - LC)}_{A_{ob}}(x - \hat{x}) = (A - LC)e(t)$$
$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

La dynamique de l'erreur d'observation est la sortie d'un système du premier ordre stable imposé par l'utilisateur (en utilisant L), donc l'erreur d'observation tend asymptotiquement vers zéro. $\boldsymbol{e(t) = e(0)e^{(A-LC)t}}$, après un régime transitoire l'observateur suit correctement l'évolution du système à commander.

4. COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT AVEC OBSERVATEUR

4.1 Cas particulier : Systèmes mono variables

Le principe de la commande par retour d'état avec observateur consiste à utiliser l'état estimé par un observateur pour ensuite construire un retour d'état comme le montre sur la fig.6.4Le retour d'état avec observateur est :

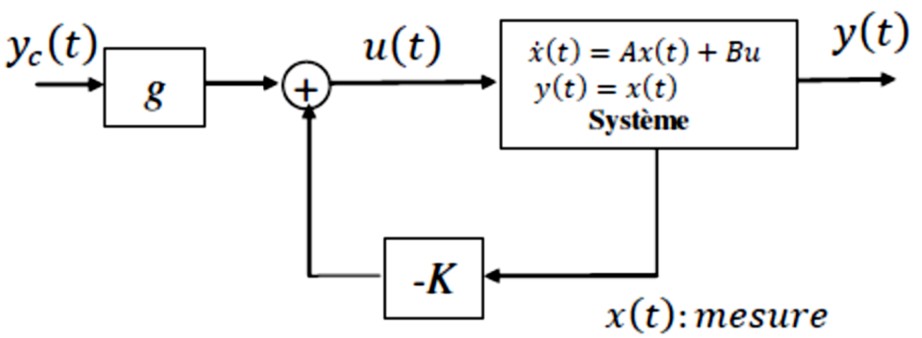

Figure3: Schéma de principe de la commande par retour d'état.

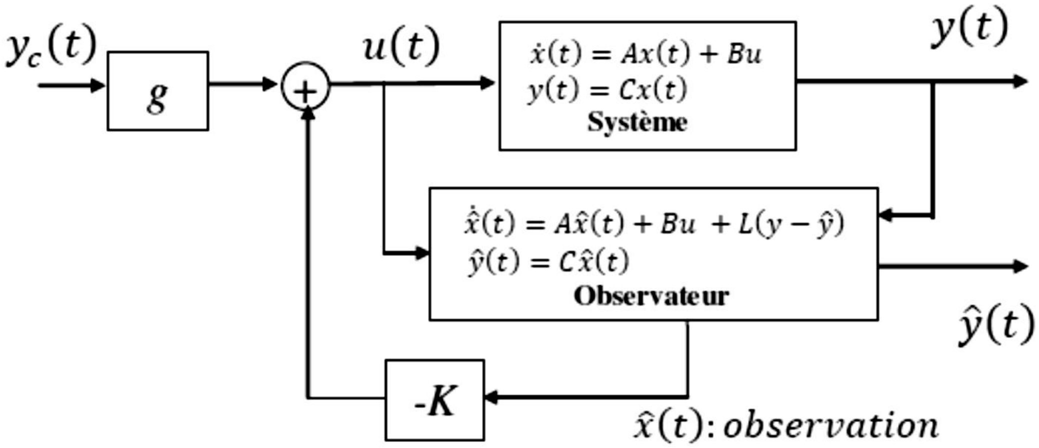

Figure 4: Schéma de principe de la commande par retour d'état avec d'observateur.

Soit le système mono variable d'ordre n

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{4}$$

Avec l'observateur:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\big(y(t) - \hat{y}(t)\big)$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \tag{5}$$

Le retour d' état avec observateur est :

$$u(t) = g\, y_c(t) - K\,\hat{x}(t) \tag{6}$$

En remplaçant (6) dans (4) et (5) : pour la clarté des expressions, on omet la variable t

$$\dot{x} = Ax - B\,K\,\hat{x} + Bgy_c \tag{7}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - B\,K\,\hat{x} + Bgy_c + LC(x - \hat{x}) \tag{8}$$

On met (7) et (8) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\hat{x}}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}A & -B\,K\\ LC & A - BK - LC\end{bmatrix}}_{A_G}\begin{bmatrix}x\\ \hat{x}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B\\ B\end{bmatrix} gy_c \tag{9}$$

$$A_G = \begin{bmatrix} A & -B\,K \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}$$ est la matrice d'évolution globale (système +observateur)

1ière colonne= 1ière colonne +2ième colonne :

$$A_G = \begin{bmatrix} A - B\,K & -B\,K \\ A - BK & A - BK - LC \end{bmatrix}$$

2ième ligne= 2ième ligne - 1ière ligne :

$$A_G = \begin{bmatrix} A - B\,K & -B\,K \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}$$

L'équitation caractéristique du système global est :

$$det\left[\left(sI - (A - B\,K\,)\right) \times \left(sI - (A - LC)\right)\right] = 0$$

$$|sI - (A - B\,K)| \times |sI - (\,A - LC)| = 0$$

$$\begin{cases} |sI - (A - B\,K)| = 0 \\ |sI - (\,A - LC)| = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

$(A - B\,K)$: matrice dynamique du système bouclé.

$(\,A - LC)$: matrice dynamique de l'observateur

4.1.1 Théorème de séparation

La dynamique du système global est constituée par la dynamique due au retour d'état plus celle due à l'observateur. Donc, le vecteur K (gain de commande) et le vecteur L (gain d'observateur) se calculent indépendamment (séparément).

Calcul de K (déjà fait au chapitre précèdent)

Calcul de L :

Dans la base initiale, on

$$\text{Système :} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$\text{Observateur :} \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu + L\left(y(t) - \hat{y}(t)\right) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

$$\text{Observateur: } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

La matrice d'évolution de l'observateur

$$A_{obs} = A - LC \quad \text{, où } L = [l_0 \quad l_1 \quad \cdots \quad l_{n-1}]^T \text{ .}$$

Afin de faciliter les calculs, il faut mettre le système sous forme compagne d'observabilité.

$$\text{Système : } \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}\,(t) \end{cases}$$

$$\text{Observateur : } \begin{cases} \dot{\hat{\tilde{x}}}(t) = \tilde{A}\hat{\tilde{x}}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{L}\left(y(t) - \hat{\tilde{y}}(t)\right) \\ \hat{y}(t) = \tilde{C}\hat{\tilde{x}}(t) \end{cases}$$

$$\text{Observateur: } \begin{cases} \dot{\hat{\tilde{x}}}(t) = (\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C})\hat{\tilde{x}}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{L}y(t) \\ \hat{y}(t) = \tilde{C}\hat{\tilde{x}}(t) \end{cases}$$

La matrice d'évolution de l'observateur :

$$\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} \text{ , où : } \tilde{L} = \left[\tilde{l}_0 \quad \tilde{l}_1 \quad \cdots \quad \tilde{l}_{n-1}\right]^T.$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = [0 \;\; 0 \dots 0 \;\; 0 \;\; 1]$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle ouverte:

$$D_{BO}(s) = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + \; a_1 s + a_0 \tag{11}$$

La matrice d'évolution de l'observateur dans la base observable est :

$$\tilde{A}_{ob} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{l}_0 \\ \tilde{l}_1 \\ \vdots \\ \tilde{l}_{n-1} \end{bmatrix} [0 \ 0 \dots \ 0 \ 1]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -(a_0 + \tilde{l}_0) \\ 1 & 0 & & \vdots & -(a_1 + \tilde{l}_1) \\ & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -(a_{n-2} + \tilde{l}_{n-2}) \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -(a_{n-1} + \tilde{l}_{n-1}) \end{bmatrix}$$

(12)

Le polynôme caractéristique de l'observateur en boucle fermée

$$D_{BF-d}^{obs*}(s) = (s - p'_1)(s - p'_2) \cdots (s - p'_n) \tag{13}$$

En imposant *n* pôles pour l'observateur en boucle fermée : $p'1 \cdots p'n$

Le polynôme caractéristique désiré de l'observateur en boucle fermée s'écrit :

$$D_{BF-d}^{obs*}(s) = (s - p'_1)(s - p'_2) \cdots (s - p'_n)$$

En développant, on obtient :

$$D_{BF}^{obs*}(s) = s^n + \beta_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + \ \beta_1 s + \beta_0 \tag{14}$$

En identifiant (13) et (14) terme à terme, il vient :

$$\begin{cases} \alpha_0 = a_0 + \tilde{l}_0 \\ \alpha_1 = a_1 + \tilde{l}_1 \\ \quad \vdots \\ \alpha_{n-1} = a_{n-1} + \tilde{l}_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{l}_0 = \beta_0 - a_0 \\ \tilde{l}_1 = \beta_1 - a_1 \\ \quad \vdots \\ \tilde{l}_{n-1} = \beta_{n-1} - a_{n-1} \end{cases}$$

D'une manière générale :

$$\tilde{l}i = \beta i - ai \ avec{:}\ i = 0 \dots n - 1$$

où :

ai : Sont les coefficients de l'équation caractéristique du système en boucle ouverte.

βi : Sont les coefficients de l'équation caractéristique désirée de l'observateur en boucle fermée.

Retour à la base initiale (calcul de L en fonction de $\tilde{L}$)

La matrice d'évolution de l'observateur dans la base canonique observable est :

$$\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}.$$

A partir de cette matrice, on veut arriver à la matrice d'évolution exprimée dans la base initiale soit :

$$A_{obs} = A - LC$$

Pour cela, on va remonter le problème de la mise sous forme compagne observable (voir le tableau).

<table>
<tr><th colspan="2">Matrice d'évolution
de l'observateur</th><th colspan="2">Passage :
forme observable $\longleftrightarrow$ forme initiale</th></tr>
<tr><td colspan="2">$A_{obs} = A - \underbrace{\left(M^{*-1}\right)^T \tilde{L}}_{L}\, C$</td><td colspan="2">Système
$S : (A, B, C)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dual $\updownarrow$</td><td colspan="2">dual $\updownarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A_{obs}^T = A^T - C^T \tilde{L}^T M^{*-1}$</td><td colspan="2">$S^*(A^T, C^T, B^T)$</td></tr>
<tr><td>$\downarrow$ $\tilde{A}_{obs}^T = M^{*-1} A_{obs}^T M^*$</td><td>$A_{obs}^T = M^* \tilde{A}_{obs}^T M^{*-1}$ $\uparrow$</td><td>$\downarrow$ $\tilde{A}^T = M^{*-1} A^T M^*$
$\tilde{C}^T = M^{*-1} C^T$
$\tilde{B}^T = B^T M^*$</td><td>$\uparrow$ $A^T = M^* \tilde{A}^T M^{*-1}$
$C^T = M^* \tilde{C}^T$
$B^T = \tilde{B}^T M^{*-1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\tilde{A}_{obs}^T = \tilde{A}^T - \tilde{C}^T \tilde{L}^T$</td><td colspan="2">$\tilde{S}^{T*}: (\tilde{A}^T, \tilde{C}^T, \tilde{B}^T)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">dual $\updownarrow$</td><td colspan="2">Dual $\updownarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$</td><td colspan="2">Système sous forme compagne d'observabilité
$\tilde{S}: (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$</td></tr>
</table>

Finalement, on revient à la base initiale :

$$L = \left(M^{*-1}\right)^T \tilde{L}$$

4.1.2 Résume: algorithme de synthèse d'un observateur d'état (cas des systèmes SISO)

Soit un système à commander :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

L'observateur en BF est défini par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\big(y(t) - \hat{y}(t)\big) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned}$$

L'on dispose d'un spectre désiré pour l'observateur (n pôles désirés de l'observateur en BF)

Etape 1 : Vérification de l'observabilité du système : calcul du $det(Qo)$

Etape 2 : Mettre le système sous forme compagne observable :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned}$$

Etape 3 : Détermination du polynôme caractéristique en BO :

$$D_{BO}(s) = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + \ a_1 s + a_0$$

Etape 4 : Détermination du polynôme caractéristique désiré de l'observateur en BF:

$$D_{BF}^{obs*}(s) = s^n + \beta_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + \ \beta_1 s + \beta_0$$

Etape 5 : Calcul du vecteur

$$\tilde{L} = [\tilde{l}_0\ \tilde{l}_1 \cdots \tilde{l}_{n-1}]^T$$

dans la base canonique compagne d'observabilité.

$$\tilde{l}i = \beta i - ai \ avec:\ i = 0 \ldots n - 1$$

Etape 6 : Calcul du vecteur

$$L = [l_0\ l_1 \cdots l_{n-1}]^T$$

c-à-d, retour à la base initiale :

$$L = \left(M^{*-1}\right)^T \tilde{L}$$

Exemple 6.1: Soit un système donné :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Concevoir un observateur d'état ayant en boucle fermée le pôle double p = −5.

Etape 1 : Vérification de l'observabilité du système : calcul du $det(Q_o)$

$$det(Q_o) = \begin{bmatrix} C & CA \end{bmatrix}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Etape 2 : Mettre le système sous forme compagne observable :

Système dual:

$$A^* = A^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, B^* = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C^* = B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mettre le système dual sous forme compagne de commandabilité Q_c

$$Q_c^* = \begin{bmatrix} B^* & A^*B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Q_c^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$M^{*-1}(1) = Q_c^{*-1}(2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$M^{*-1}(2) = Q_c^{*-1}(1)A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$M^{*-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, M^* = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Système dual sous forme compagne de commandabilité

$$\tilde{A}^* = M^{*-1}A^*M^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{B}^* = M^{*-1}B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{C}^* = C^*M^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors, la forme compagne d'observabilité du système est :

$$\tilde{A} = \tilde{A}^{*T} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \tilde{C}^{*T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \tilde{B}^{*T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etape 3 : Détermination du polynôme caractéristique en BO :

$$D_{BO}(s) = s^2 - 3\,s - 2 \Rightarrow a_0 = 2, a_1 = -3$$

Etape 4 : Détermination du polynôme caractéristique désiré de l'observateur en BF:

$$D_{BF}^{obs*}(s) = (s+5)(s+5) = s^n + 10\,s + 25 \Rightarrow \beta_0 = 25, \beta_1 = 10$$

Etape 5 : Calcul du vecteur

$$\tilde{L} = [\tilde{l}_0\ \tilde{l}_1]^T$$

dans la base canonique compagne d'observabilité

$$\tilde{l}_0 = \beta_0 - a_0 = 27$$
$$\tilde{l}_1 = \beta_1 - a_1 = 13$$

Etape 6 : Calcul du vecteur

$$L = [l_0\ l_1]^T$$

c-à-d, retour à la base initiale :

$$L = \left(M^{*-1}\right)^T \tilde{L} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53 \\ 66 \end{bmatrix}$$