

## Transformation en Z

### 1. INTRODUCTION

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des systèmes continus (linéaires), dont la principale fonction consistait à traiter continûment, en temps réel, des signaux eux-mêmes continus, c'est-à-dire des signaux représentés par des fonctions continues du temps. On parle alors de signaux et de systèmes à temps continu.

Dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement : ordinateurs, calculateurs, systèmes numériques en tout genre.

De tels outils ne peuvent en aucun cas s'accommoder de signaux continus ; ceux-ci doivent être transformés en suites de nombres pour pouvoir être traités (figure.1). De même, ces systèmes délivrent, à leur sortie, des suites de valeurs numériques, autrement dit, des signaux numériques.

**Remarque** : On parle aussi de systèmes et de signaux à temps discret par opposition à la notion de temps continu



**Figure.1** Traitement numérique d'un signal.

La transformation en z est l'outil privilégié que l'on utilise dès que l'on doit traiter des signaux et des systèmes discrets.

Dans le cadre de l'étude des systèmes analogiques, l'exploitation des propriétés remarquables de la transformée de Laplace a permis de gagner en efficacité dans l'analyse mathématique des systèmes dynamiques, les calculs à effectuer étant notablement allégés.

Grâce à cet outil mathématique, la résolution d'équations différentielles, le calcul des régimes transitoires, l'analyse de la stabilité, puis, par suite, l'interconnexion de systèmes analogiques dynamiques ont été considérablement facilités. On propose ici un outil équivalent, adapté aux signaux et systèmes discrets : il s'agit de la transformée en z.

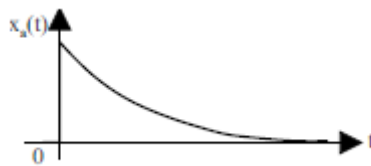
La transformée en z est au premier abord tout aussi obscure que celle de Laplace. Néanmoins, en gardant à l'esprit la nature temporelle d'un petit nombre de signaux fondamentaux et leurs transformées en z correspondantes, on peut très rapidement apprendre à analyser des signaux discrets sur la base unique de leur image dans le plan de z.

En effet, si pour l'instant, le lien entre la transformée de Laplace

$$X_a(p) = \frac{1}{(p - p_1)}$$

$p_1$  étant un pôle de  $x_a(t)$ , le signal temporel analogique

$$x_a(t) = \varepsilon(t)e^{p_1 t}$$

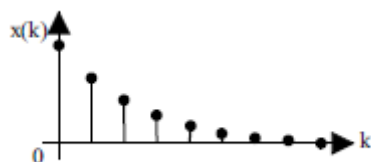


La transformée en z

$$X(z) = \frac{z}{(z - p_1)}$$

et le signal temporel discret  $x(k)$

$$x(k) = \varepsilon(k)p_1^k$$



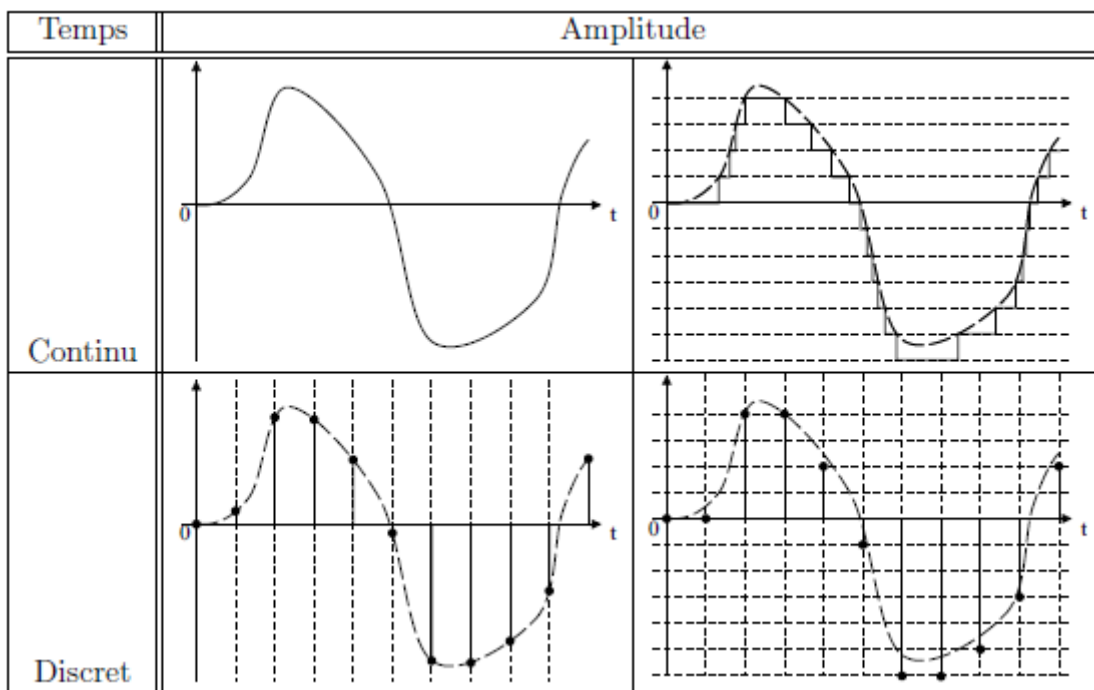
$p_1$  étant un pôle de  $X(z)$

## 2. SIGNAUX DISCRETS

Selon que l'amplitude des signaux est définie de manière continue ou ne peut varier que par valeurs discrètes, et selon que la variable libre, le temps  $t$ , évolue continûment ou de manière discrète, quatre types de signaux peuvent être définis :

		Amplitude	Temps
<u>1</u>	signal analogique	continue	continu
<u>2</u>	signal quantifié	discrète	continu
<u>3</u>	signal discret	continue	discret
<u>4</u>	signal numérique	discrète	discret

Graphiquement, ces quatre types de signaux ont les allures données dans le tableau 1.



**Tableau.1: Allures des 4 types de signaux définis**

Un signal discret  $x(k)$  est donc un signal dont la variable libre (i.e. le temps) est discrète. "Physiquement",  $x(k)$  est une suite de nombres.

En se référant au schéma de base d'un système de régulation numérique (figure.2), on voit que :

- le signal de la grandeur réglée  $y(t)$  est analogique ;
- le signal de la commande appliquée au système à régler  $u(t)$  est quantifié ;

- le signal de la grandeur réglée après conversion,  $y(k)$ , ainsi que celui de consigne  $w(k)$  sont numériques. Toutefois, lorsque la résolution du convertisseur A/D est suffisamment élevée, la quantification de l'amplitude des ces signaux est négligeable et ceux-ci se confondent avec des signaux discrets.

Les signaux que l'on considère, quel que soit leur type, sont admis nuls pour  $t < 0$ , ce qui revient à dire :

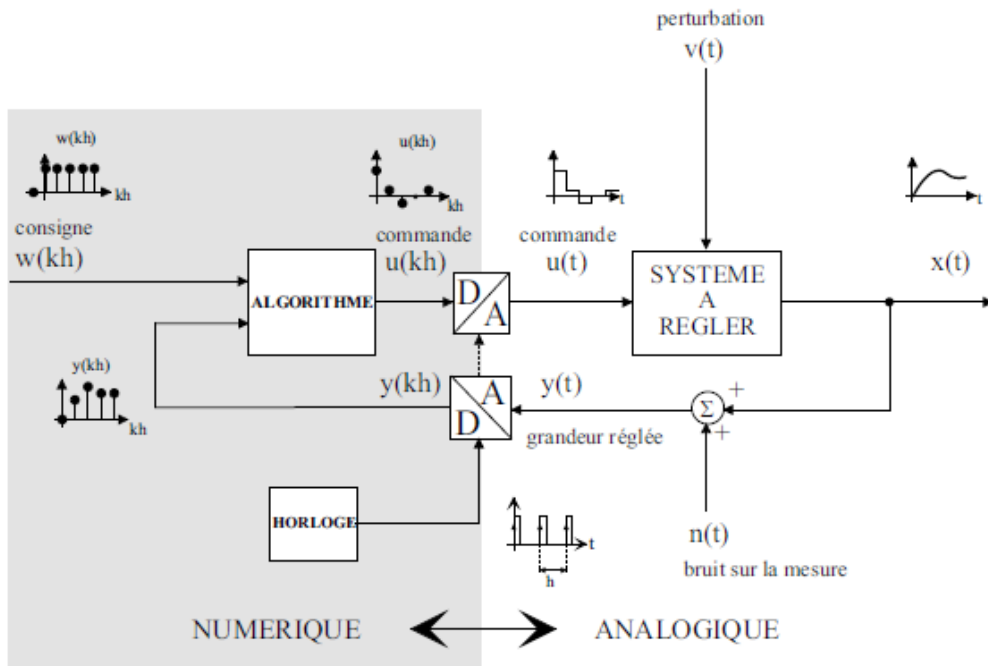


Figure.2: Schéma fonctionnel d'un système de régulation numérique.

## 2.1 Signaux discrets particuliers

### 1. L'impulsion unité discrète

$$\Delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases}$$

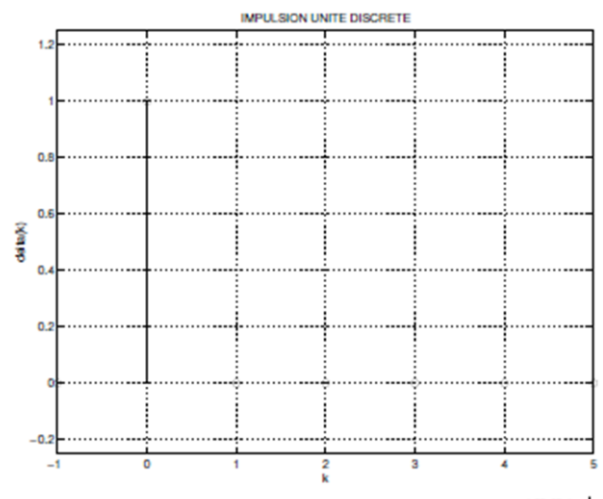


Figure 3: Impulsion unité discrète  $\Delta(k)$

et le saut unité discret

$$\epsilon(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \geq 0 \\ 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases}$$

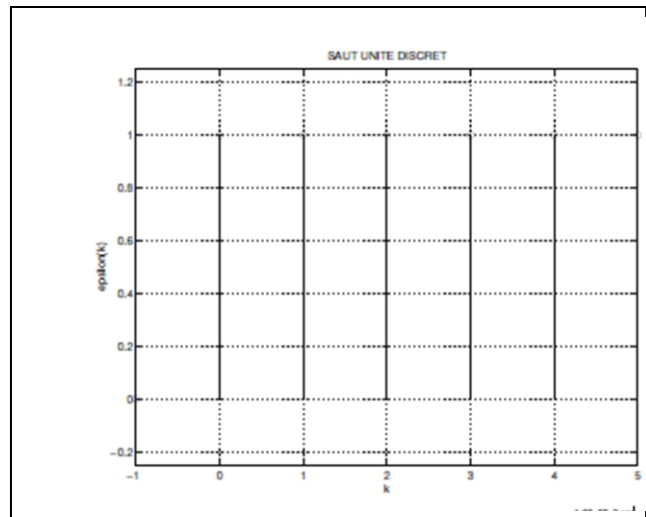


Figure 4: Saut unité discret  $\epsilon(k)$

sont les versions discrètes de l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  et du saut unité  $\Delta(k)$  respectivement.

Ces deux signaux discrets présentent un intérêt tout particulier du point de vue de l'analyse des propriétés du système étudié (gain statique, type, existence de modes oscillatoires, stabilité, etc).

### 3. TRANSFORMEE EN Z

#### 3.1 Définition

La transformée en z  $X(z)$  d'un signal discret  $x(k)$  est donnée par:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k}$$

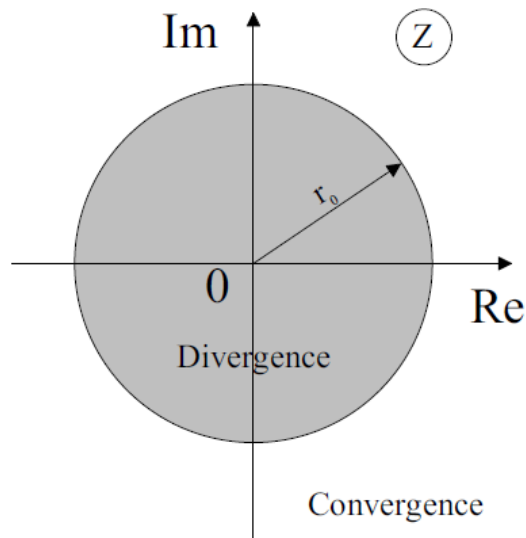
où z est une variable complexe. Comme les signaux  $x(k)$  considérés dans ce cours ne sont définis que pour  $k \geq 0$ , la définition peut se restreindre à la transformée en z unilatérale :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} \quad |z| > r_0$$

On voit qu'il s'agit d'évaluer la somme :

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

Cette somme converge vers une valeur finie à condition que la valeur de  $z$  soit située



**Figure 5: Domaine de convergence de la transformée en  $z$**

dans un domaine déterminé par son **rayon de convergence**  $r_0$  (figure 5).

Si

$$|z| > r_0$$

La somme converge, alors qu'on ne peut a priori rien dire du cas limite où  $z = r_0$ .

Géométriquement, le domaine de convergence est limité par un cercle de rayon  $r_0$ .

### 3.2 Commentaire

La définition de la transformée en  $z$  qui a été adoptée, contrairement aux apparences, ne tombe pas du ciel. Elle s'inspire directement de celle de la transformée unilatérale de Laplace,

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt \quad p \geq p_0$$

Où l'on voit que la fonction  $x(t)$  objet de la transformation est multipliée dans l'espace-temps par une fonction de type exponentiel. Ce faisant, pour autant que la variable complexe  $s$  ait une valeur assurant la convergence, la surface comprise entre l'axe du temps  $t$  et la fonction

$$x(t) * e^{-pt}$$

est finie et l'intégrale existe.

Il en va exactement de même pour la transformée en  $z$ , développée pour les signaux discrets sur un principe identique. On multiplie, i.e. on pondère la fonction

$$x(t)$$

par une fonction de type exponentiel

$$z^{-k}$$

qui pourrait être  $(e^{sh})^{-k}$  et l'on somme ("intègre") le produit

$$x(t) * z^{-k}$$

sur tous les  $k$ , cette somme ne convergeant que pour un ensemble de valeurs de  $z$  telles que  $|z| > r_0$  :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots$$

### 3.3. Exemples

#### Exemples 1: transformée en $z$ de l'impulsion unité discrète $\Delta(k)$

Rappelant la définition de  $\Delta(k)$

$$\Delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases}$$

on voit que sa transformée en  $z$  s'écrit simplement

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots = 1 \quad \forall z$$

La similitude avec la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac ne peut échapper à personne !

#### Exemple : transformée en $z$ d'un signal exponentiel

Soit le signal discret défini par :

$$x(k) = a^{k \cdot h} \quad a \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$$

Sa transformée en  $z$  est par application de la définition

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{k \cdot h} \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (a^h \cdot z^{-1})^k = \frac{1}{1 - a^h \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - a^h} \quad |z| > |a^h| = r_0$$

Notons que le résultat obtenu confirme ce qui est déjà connu de la théorie des progressions géométriques ; soit une telle progression de raison  $r$  :

$$r^0, r^1, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}$$

La somme des  $n$  premiers termes de cette progression s'écrit :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} r^i = 1 + r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1}$$

Pour  $n$  tendant vers l'infini, on trouve le résultat bien connu

$$S_{\infty} = \frac{1}{1 - r}$$

valable exclusivement pour  $|r| < 1$ .

Ce résultat correspond à la transformée en  $z$  précédemment calculée, en posant

$$r = a^h \cdot z^{-1}$$

### Exemple : Signal de durée finie

Soit le signal discret de durée finie de la (figure 6 ) page suivante. Sa transformée est simplement :

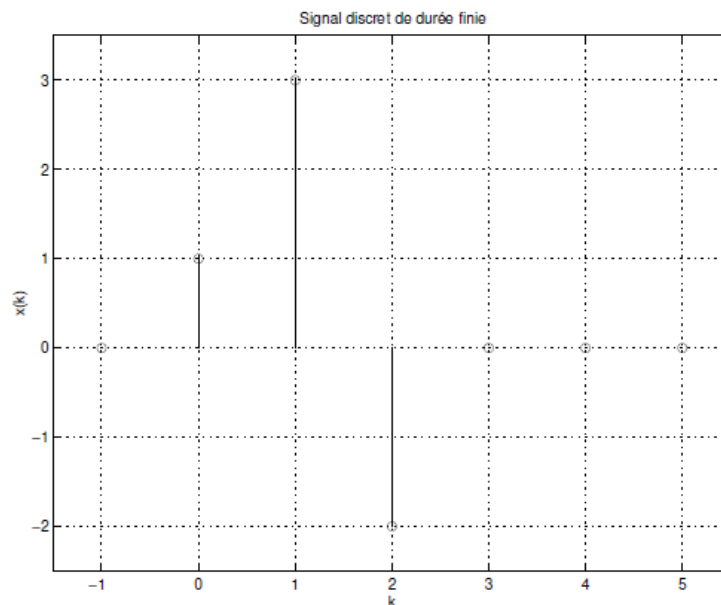


Figure 6: Signal discret de durée finie.



$$Z \{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k} = 1 + 3 \cdot z^{-1} - 2 \cdot z^{-2}$$

### 3.4 Propriétés

On passe en revue ci-après quelques propriétés importantes de la transformation en  $z$ , sans les démontrer. Les propriétés que l'on relèvera tout particulièrement sont celles :

- de la translation avant (signal retardé) ;
- du produit de convolution ;
- de la valeur finale.

Les propriétés énoncées sont comparables à celles de la transformée de Laplace.

#### 3.4.1. Linéarité

La transformée en  $z$  d'une combinaison linéaire de signaux est égale à la combinaison linéaire des transformées en  $z$  des signaux respectifs :

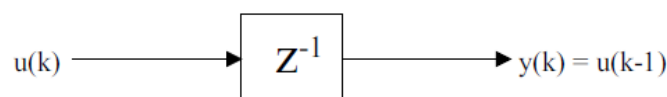
$$Z\{a \cdot x(k) + b \cdot y(k)\} = a \cdot Z\{x(k)\} + b \cdot Z\{y(k)\} = a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$$

#### 3.4.2. Translation avant (signal retardé)

La transformée en  $z$  d'un signal discret retardé de  $d$  périodes d'échantillonnage est donnée par la transformée en  $z$  du signal non-retardé multipliée par  $z^{-d}$  :

$$Z\{x(k-d)\} = z^{-d} \cdot Z\{x(k)\} = z^{-d} \cdot X(z)$$

Cette propriété est fondamentale et offre en particulier l'opérateur "retard d'une période d'échantillonnage", indispensable dans le traitement numérique des signaux.

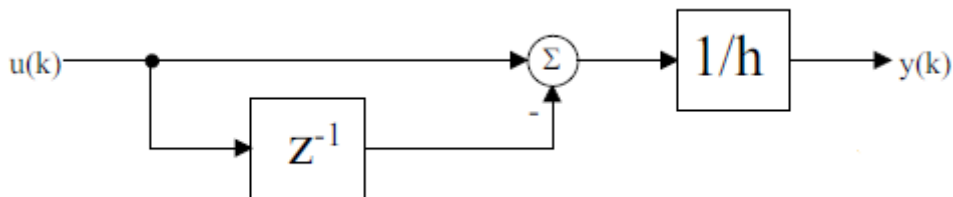


### Exemple : schéma fonctionnel détaillé d'un dérivateur numérique.

Le dérivateur numérique est un opérateur approximant la dérivée du signal appliqué à son entrée. Une première manière de procéder consiste à écrire que

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \approx \frac{u(k) - u(k-1)}{h} = y(k)$$

Graphiquement, on peut représenter cette opération à l'aide de gains, sommateur et de retards élémentaires.



### 3.4.3. Translation arrière (signal avancé)

La transformée en z d'un signal discret avancé de d périodes d'échantillonnage est :

$$Z\{x(k+d)\} = z^{+d} \cdot Z\{x(k)\} - \sum_{i=0}^{d-1} x(i) \cdot z^{d-i} = z^d \cdot X(z) - \sum_{i=0}^{d-1} x(i) \cdot z^{d-i}$$

Se rappelant que l'axe du temps débute en  $k = 0$ , et que l'on a admis que les signaux sont nuls pour  $k < 0$ , on voit que cette relation élimine tous les échantillons qui, par suite de la translation arrière, i.e. l'avance du signal, seraient définis pour  $k < 0$ .

### 3.4.4. Produit de convolution

La transformée en z du produit de convolution de deux signaux discrets  $g(k)$  et  $u(k)$  est égale au produit des transformées en z de chacun des signaux.

$$Z\{g(k) * u(k)\} = Z\left\{\sum_{l=0}^k g(k-l) \cdot u(l)\right\} = G(z) \cdot U(z)$$

Cette transformation constitue la pierre angulaire de toute l'analyse des systèmes discrets par la transformée en z. Sans le bénéfice d'une telle propriété, la

transformée en z ne serait d'aucune utilité. Le parallélisme avec la transformée de Laplace est évident :

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau\right\} = \mathcal{L}\{g(t) * u(t)\}$$

### 3.4.5. Théorème de la valeur finale

La valeur finale d'un signal discret  $x(k)$  peut se calculer par :

$$x_{\infty} = x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1) \cdot X(z))$$

Cette formule s'avérera très utile ultérieurement pour calculer le gain permanent de systèmes dynamiques linéaires discrets.

### 3.4.6. Théorème de la valeur initiale

La valeur initiale d'un signal discret  $x(k)$  peut se calculer par :

$$x(0) = \lim_{k \rightarrow 0} x(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

## 4. METHODES DE CALCUL DE LA TRANSFORMEE EN Z

Il est rare qu'il soit nécessaire de calculer la transformée en z selon la formule

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k}$$

En général, on dispose de tables où les transformées en z d'un certain nombre de signaux de base sont données. Une telle table se trouve en annexe de ce chapitre.

Un signal ne figurant pas dans la table peut souvent s'exprimer par une combinaison linéaire de signaux élémentaires dont les transformées sont alors dans la table. Ces dernières, combinées linéairement, permettent, en faisant usage de la propriété de linéarité, d'obtenir la transformée en z recherchée.

### Exemple

On se propose de calculer la transformée en z du signal discret  $x(k)$  (figure 7) résultant de l'échantillonnage du signal analogique

$$x(t) = \epsilon(t) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

qui représente par exemple la réponse indicielle d'un filtre passe-bas de premier ordre.

Avec

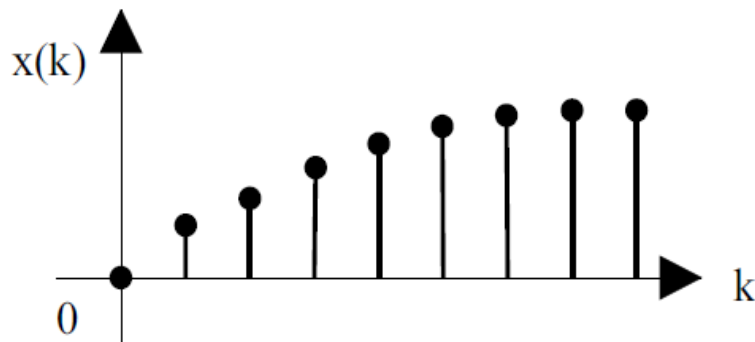
$$x(t) = \epsilon(t) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

on a

$$x(k) = \epsilon(k) \cdot \left(1 - e^{-\frac{h}{T} \cdot k}\right)$$

La transformée en z étant une opération linéaire, on peut écrire :

$$X(z) = Z\{x(k)\} = Z\{\epsilon(k)\} - Z\{\epsilon(k) \cdot e^{-\frac{h}{T} \cdot k}\}$$



**Figure 7: Signal numérique  $x(k)$  dont la transformée en z est calculée en exemple**

Le recours à la table des transformées en z de l'annexe fournit directement les transformées du saut unitaire et de l'exponentielle : il s'agit des transformées 3 et 6. De ce fait, on a pour  $X(z)$  :

L'application du théorème de la valeur finale donne

$$\begin{aligned} X(z) = Z\{x(k)\} &= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-\frac{h}{T}}} \\ &= \frac{z \cdot \left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right)}{(z-1) \cdot \left(z - e^{-\frac{h}{T}}\right)} \end{aligned}$$

De même, celui de la valeur initiale fournit la limite :

$$x_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{z \cdot \left(1 - e^{-\frac{h}{T}}\right)}{(z-1) \cdot \left(z - e^{-\frac{h}{T}}\right)} = 1$$

### 3.6 Inversion de la transformée en z

On examine ici deux méthodes souvent utilisées pour inverser la transformée en z d'un signal discret. Il en existe d'autres, notamment celle de l'intégration dans le plan complexe, qui présente un intérêt essentiellement académique, raison pour laquelle on renoncera à sa présentation.

#### 3.6.1. Décomposition en éléments simples

L'inversion de la transformée en z s'effectue le plus souvent à l'aide de tables.

La transformée à inverser doit être décomposée en éléments simples, les transformées inverses de ceux-ci se trouvant en général dans la table. Si l'on veut procéder de manière systématique pour cette décomposition, on peut faire usage du théorème des résidus

#### Exemple

Soit la transformée en z  $X(z)$  d'un signal discret  $x(k)$  :

$$X(z) = \frac{0.1 \cdot z \cdot (z + 1)}{(z - 1)^2 \cdot (z - 0.6)}$$

avec  $h = 1$  [s].

En décomposant manuellement en élément simples

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{a \cdot z}{z - 1} + \frac{b \cdot z}{(z - 1)^2} + \frac{c \cdot z}{z - 0.6} \\ &= \dots \\ &= \frac{-z}{z - 1} + \frac{0.5 \cdot z}{(z - 1)^2} + \frac{z}{z - 0.6} \end{aligned}$$

La table des transformées en z de l'annexe offre les transformées en z inverses de chacun des éléments simples :

$$x(k) = Z^{-1}\{X(z)\} = (-1 + 0.5 \cdot k \cdot h + 0.6^k) \cdot \epsilon(k)$$

Les premiers échantillons de  $x(k)$  sont donc

$$\begin{aligned}
 x(0) &= -1 + 0 + 1 = 0 \\
 x(1) &= -1 + 0.5 + 0.6 = 0.1 \\
 x(2) &= -1 + 0.5 \cdot 2 + 0.6^2 = 0.36 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

### 3.6.2. Inversion par division polynomiale

La suite de nombres  $x(k)$  ayant pour transformée en  $z$   $X(z)$  peut être obtenue très simplement par la division formelle du numérateur par le dénominateur de  $X(z)$ .

Partant de

$$X(z) = z^{-d} \cdot \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_{m-1} \cdot z^{1-m} + b_m \cdot z^{-m}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_{n-1} \cdot z^{1-n} + a_n \cdot z^{-n}}$$

on effectue donc la division

$$\frac{b_0 \cdot z^{-d} + b_1 \cdot z^{-1-d} + \dots + b_{m-1} \cdot z^{1-n} + b_m \cdot z^{-n}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_{n-1} \cdot z^{1-n} + a_n \cdot z^{-n}} \left| \begin{array}{l} x(0) \cdot z^{-d} + x(1) \cdot z^{-1-d} + \dots + x(n) \cdot z^{-n-d} + x(n+1) \cdot z^{-n-1-d} + \dots \end{array} \right.$$

Les nombres  $x(k)$  cherchés ne sont autres que les coefficients du résultat de la division. Par rapport à la méthode précédente,  $x(k)$  n'est donc pas obtenu explicitement, mais sous la forme de ses valeurs numériques successives.

#### Exemple

Soit la transformée en  $z$   $X(z)$  d'un signal discret  $x(k)$

$$X(z) = \frac{0.1 \cdot z \cdot (z + 1)}{(z - 1)^2 \cdot (z - 0.6)} = \frac{0.1 \cdot z^2 + 0.1 \cdot z}{z^3 - 2.6 \cdot z^2 + 2.2 \cdot z - 0.6}$$

On effectue la division formelle :

$  \begin{array}{r}  0.1 \cdot z^2 \quad +0.1 \cdot z \\  0.1 \cdot z^2 \quad -0.26 \cdot z \quad +0.22 \quad -0.06 \cdot z^{-1} \\  \hline  \phantom{0.1 \cdot z^2} \quad 0.36 \cdot z \quad -0.22 \quad +0.06 \cdot z^{-1} \\  \phantom{0.1 \cdot z^2} \quad 0.36 \cdot z \quad -0.936 \quad +0.792 \cdot z^{-1} \quad -0.216 \cdot z^{-2} \\  \hline  \phantom{0.1 \cdot z^2} \phantom{0.36 \cdot z} \quad 0.716 \phantom{-0.216 \cdot z^{-2}} \quad + \dots  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  z^3 - 2.6 \cdot z^2 + 2.2 \cdot z - 0.6 \\  \hline  0.1 \cdot z^{-1} + 0.36 \cdot z^{-2} + 0.716 \cdot z^{-3} + \dots  \end{array}  $
---	--

Ce qui donne directement les valeurs des échantillons cherchées :

$$X(0)=0, \quad x(1)=0.1 \qquad x(2)=0.36 \qquad x(3)=0.716$$

**ANNEXE : TABLE DES TRANSFORMEES EN Z**

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(k)$	$\mathcal{Z}\{f(k)\}$
1	$\delta(t)$	1		
2			$\Delta(k)$	1
3	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\epsilon(k)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$t$	$\frac{1}{s^2}$	$k \cdot h$	$\frac{h \cdot z}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{2} \cdot t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} \cdot (k \cdot h)^2$	$\frac{h^2}{2} \cdot \frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$
6	$e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{z}{z-e^{-a \cdot h}}$
7			$a^{k \cdot h}$	$\frac{z}{z-a^h}$
8	$t \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$k \cdot h \cdot e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{h \cdot e^{-a \cdot h} \cdot z}{(z-e^{-a \cdot h})^2}$
9			$k \cdot h \cdot a^{k \cdot h}$	$\frac{h \cdot a^h \cdot z}{(z-a^h)^2}$
10	$\sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{\sin(\omega \cdot h) \cdot z}{z^2-2 \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+1}$
11	$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{z \cdot (z-\cos(\omega \cdot h))}{z^2-2 \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+1}$
12	$e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} \cdot \sin(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{e^{-a \cdot h} \cdot \sin(\omega \cdot h) \cdot z}{z^2-2 \cdot e^{-a \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+e^{-2 \cdot a \cdot h}}$
13	$e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{z \cdot (z-e^{-a \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot h))}{z^2-2 \cdot e^{-a \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+e^{-2 \cdot a \cdot h}}$
14			$a^{k \cdot h} \cdot \sin(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{a^h \cdot \sin(\omega \cdot h) \cdot z}{z^2-2 \cdot a^h \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+a^{2 \cdot h}}$
15			$a^{k \cdot h} \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot h)$	$\frac{z \cdot (z-a^h \cdot \cos(\omega \cdot h))}{z^2-2 \cdot a^h \cdot \cos(\omega \cdot h) \cdot z+a^{2 \cdot h}}$
16	$1 - e^{-a \cdot t}$	$\frac{a}{s \cdot (s+a)}$	$1 - e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{(1-e^{-a \cdot h}) \cdot z}{(z-1) \cdot (z-e^{-a \cdot h})}$

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(k)$	$\mathcal{Z}\{f(k)\}$
17	$\frac{1}{a} \cdot (a \cdot t - (1 - e^{-a \cdot t}))$	$\frac{1}{s^2 \cdot (s+a)}$	$\frac{1}{a} \cdot (a \cdot k \cdot h - (1 - e^{-a \cdot k \cdot h}))$	$\frac{h \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{1-e^{-a \cdot h} \cdot z}{(z-1) \cdot (z-e^{-a \cdot h})}$
18	$1 - (1 + a \cdot t) \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{s \cdot (s+a)^2}$	$1 - (1 + a \cdot k \cdot h) \cdot e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-a \cdot h}} - \frac{e^{-a \cdot h} \cdot a \cdot h \cdot z}{(z-e^{-a \cdot h})^2}$
19	$e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t}$	$\frac{b-a}{(s+a) \cdot (s+b)}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} - e^{-b \cdot k \cdot h}$	$\frac{(e^{-a \cdot h} - e^{-b \cdot h}) \cdot z}{(z-e^{-a \cdot h}) \cdot (z-e^{-b \cdot h})}$
20	$1 + \frac{b \cdot e^{-a \cdot t} - a \cdot e^{-b \cdot t}}{a-b}$	$\frac{a-b}{s \cdot (s+a) \cdot (s+b)}$	$1 + \frac{b \cdot e^{-a \cdot k \cdot h} - a \cdot e^{-b \cdot k \cdot h}}{a-b}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{b}{a-b} \cdot \frac{z}{z-e^{-a \cdot h}} + \frac{a}{a-b} \cdot \frac{z}{z-e^{-b \cdot h}}$
21	$e^{-a \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{h} \cdot t\right)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2}$	$e^{-a \cdot k \cdot h} \cdot \cos(\pi \cdot k)$	$\frac{z}{z-e^{-a \cdot h}}$
22	$\frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2} \cdot (k \cdot h)^2 \cdot e^{-a \cdot k \cdot h}$	$\frac{h^2}{2} \cdot \frac{e^{-a \cdot h} \cdot z \cdot (z-e^{-a \cdot h})}{(z-e^{-a \cdot h})^3}$