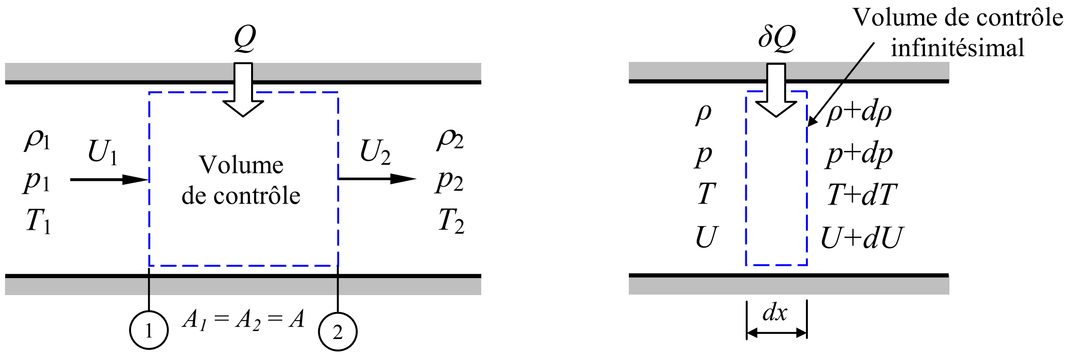
II. ECOULEMENT SANS FROTTEMENT ET AVEC ECHANGE DE CHALEUR :

ECOULEMENT DE RAYLEIGH

II.1. Analyse de l'écoulement de Rayleigh et équations de base

On considère un écoulement stationnaire, unidimensionnel et idéal (i.e. effets visqueux négligeables) d'un gaz parfait de capacités calorifiques constantes à travers une conduite de section constante avec transfert de chaleur; tels écoulements sont appelés écoulements de Rayleigh (Fig).



Les équations de conservation pour cet écoulement sont les suivantes:

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = \rho U = C^{ste} \qquad \text{(continuité)} \qquad (1)$$

$$p_1 + \rho_1 U_1^2 = p_2 + \rho_2 U_2^2 \qquad \text{(Qt. de Mvt. suivant x)} \qquad (2)$$

$$\left(h_2 + \frac{U_2^2}{2}\right) - \left(h_1 + \frac{U_1^2}{2}\right) = \frac{\dot{Q}}{Q_m} \qquad \text{(énergie)} \qquad (3)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_p} = \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \qquad \text{(2}^{\text{nd}}\text{ principe)} \qquad (4)$$

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} = \frac{p}{\rho T} = C^{ste} \qquad \text{(loi des gaz parfait)} \qquad (5)$$

Ces équations peuvent se réécrire sous forme différentielle respectivement comme suit:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dU}{U} \qquad (6)$$

$$dp + \rho U dU = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dp}{p} = -\frac{UdU}{RT} \qquad (7)$$

$$c_p dT + UdU = \frac{\delta Q}{\delta m} = dq \qquad \text{ou} \qquad \frac{dT}{T} = \frac{dq}{c_p T} - \frac{UdU}{c_p T} \tag{8}$$

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{dp}{p} \tag{9}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \tag{10}$$

En remplaçant par (6)-(8) dans l'équation (10), on aura après réarrangement:

$$\frac{dq}{dU} = c_p \frac{T}{U}\left(1 - \mathrm{Ma}^2\right) \tag{11}$$

L'équation (11) montre que pour un écoulement subsonique ($\mathrm{Ma} < 1$) nous avons $\frac{dq}{dU} > 0$ (c'est-à-dire quand l'écoulement reçoit de la chaleur, la vitesse augmente, et quand il perd de la chaleur la vitesse diminue); tandis que pour un écoulement supersonique ($\mathrm{Ma} > 1$) nous avons $\frac{dq}{dU} < 0$ (c'est-à-dire quand l'écoulement reçoit de la chaleur, la vitesse diminue, et quand il perd de la chaleur la vitesse augmente). Lorsque $\mathrm{Ma} = 1$, nous avons $\frac{dq}{dU} = 0$.

A partir de la définition du nombre de Mach $\mathrm{Ma}^2 = U^2 / \gamma RT$, on tire l'équation suivante:

$$\frac{dT}{T} = 2\frac{dU}{U} - 2\frac{d\mathrm{Ma}}{\mathrm{Ma}} \tag{12}$$

En remplaçant par (6), (7) et (12) dans l'équation (10), on obtient après réarrangement:

$$\frac{d\mathrm{Ma}}{\mathrm{Ma}} = \frac{1 + \gamma \mathrm{Ma}^2}{2}\frac{dU}{U} \tag{13}$$

L'équation (13) montre que le nombre de Mach augmente avec l'augmentation de la vitesse, et diminue avec la diminution de la vitesse. Maintenant, en remplaçant par (13) dans (12), on aura:

$$\frac{dT}{dU} = \frac{T}{U}\left(1 - \gamma \mathrm{Ma}^2\right) \tag{14}$$

L'équation (14) montre que la température de l'écoulement atteint sa valeur maximale lorsque:

$$\frac{dT}{dU} = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{Ma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \tag{15}$$

et pour $\mathrm{Ma} < \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ nous avons $\frac{dT}{dU} > 0$, alors que pour $\mathrm{Ma} > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ nous avons $\frac{dT}{dU} < 0$. La variation d'entropie avec l'échange de chaleur peut être mieux présentée en écrivant le 2nd principe de la thermodynamique sous sa forme la plus simple:

$$ds = \frac{dq}{T} \tag{16}$$

Donc, à partir de (16) on peut clairement constater que si l'écoulement reçoit de la chaleur, l'entropie augmente, et s'il perd de la chaleur, l'entropie diminue. On peut conclure alors que l'échauffement du gaz peut augmenter l'entropie jusqu'à une valeur maximale qui correspond à l'état critique ($\mathrm{Ma} = 1$).

	$dq > 0$ (échauffement)			$dq < 0$ (refroidissement)		
Régime d'écoulement	$d\mathrm{Ma}$	dV	ds	$d\mathrm{Ma}$	dV	ds
Subsonique Ma < 1	+	+	+	-	-	-
Supersonique Ma > 1	-	-	+	+	+	-

II.2. Variation des caractéristiques d'écoulement en fonction du nombre de Mach

Etant donné que $\rho U^2 = \gamma p \mathrm{Ma}_2$, l'équation (2) peut s'écrire:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1+\gamma \mathrm{Ma}_1^2}{1+\gamma \mathrm{Ma}_2^2} \tag{17}$$

De la loi des gaz parfait (5), l'équation de continuité (1), on a:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_2}{p_1}\frac{U_2}{U_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\mathrm{Ma}_2\sqrt{\gamma R T_2}}{\mathrm{Ma}_1\sqrt{\gamma R T_1}}$$

La substitution de (17) dans l'équation précédente donne:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1+\gamma \mathrm{Ma}_1^2\right)^2}{\left(1+\gamma \mathrm{Ma}_2^2\right)^2}\frac{\mathrm{Ma}_2^2}{\mathrm{Ma}_1^2} \tag{18}$$

Cela implique que:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1+\gamma \mathrm{Ma}_1^2}{1+\gamma \mathrm{Ma}_2^2}\frac{\mathrm{Ma}_2^2}{\mathrm{Ma}_1^2} \tag{19}$$

et:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1+\gamma \mathrm{Ma}_2^2}{1+\gamma \mathrm{Ma}_1^2}\frac{\mathrm{Ma}_1^2}{\mathrm{Ma}_2^2} \tag{20}$$

En substituant (17) et (18) dans l'équation (4), la variation d'entropie s'écrit:

$$\frac{s_2 - s_1}{c_p} = \ln\left(\frac{\mathrm{Ma}_2^2}{\mathrm{Ma}_1^2}\left(\frac{1+\gamma \mathrm{Ma}_1^2}{1+\gamma \mathrm{Ma}_2^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right) \qquad (21)$$

Comme il était indiqué précédemment, si on échauffe le gaz, les caractéristiques de l'écoulement s'approchent de l'état critique (Ma → 1); alors que si on refroidit le gaz, les caractéristiques de l'écoulement s'éloignent de l'état critique. Il convient donc de réécrire les équations précédentes (17)-(21) en terme des conditions critiques $p_2 = p^*$, $T_2 = T^*$, $\rho_2 = \rho^*$, $U_2 = U^*$ et $s_2 = s^*$ associent à $\mathrm{Ma}_2 = 1$, telles que:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma \mathrm{Ma}^2} \qquad (22)$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{(1+\gamma)^2 \mathrm{Ma}^2}{(1+\gamma \mathrm{Ma}^2)^2} \qquad (23)$$

$$\frac{U}{U^*} = \frac{(1+\gamma)\mathrm{Ma}^2}{1+\gamma \mathrm{Ma}^2} \qquad (24)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1+\gamma \mathrm{Ma}^2}{(1+\gamma)\mathrm{Ma}^2} \qquad (25)$$

$$\frac{s^* - s}{c_p} = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{Ma}^2}\left(\frac{1+\gamma \mathrm{Ma}^2}{1+\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right) \qquad (26)$$