1

# ملخص المحاضرة الرابعة

1. تقدير تباين حد الاضطراب :

لدينا : $\hat{E} = Y - X\hat{B}$

ومنه

$$E = XB + U - X\hat{B}$$

ولدينا

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'(XB + U)$$

ومنه

$$E = XB + U - X\left[(X'X)^{-1} X'(XB + U)\right]$$

ومنه

$$E = \left[I_n - X(X'X)^{-1} X'\right] U$$

حيث

$$I_n - X(X'X)^{-1} X' = M$$

أي مصفوفة عقيمة ومتناظرة ومنه

$$E = MU$$

حيث

$$M = M^2 = M^3 = \dots\dots = M^n$$

وأن

$$M = M'$$

لدينا :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = E'.E = U'M'.MU$$

ومنه

$$\sum e_i^2 = E'E = U'MU$$

ومنه

$$E(\sum e_i^2) = \sigma^2 tr(M)$$

ويدعى $tr(M)$ بأثر المصفوفة $M$ .

ومنه

$$E(\sum e_i^2) = \sigma_u^2 tr[I_n - X(X'X)^{-1}X']$$

$$= \sigma_u^2 [tr(I_n) - tr(X'X)^{-1}(X'X)]$$

$$= \sigma_u^2 (n - tr(I_k)]$$

$$E(\sum e_i^2) = \sigma_u^2 (n-k)$$

ومنه

$$E\left(\frac{\sum e_i^2}{n-k}\right) = \sigma_u^2$$

ولذلك يمكن أن نكتب

$$\boxed{\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-K}}$$

حيث $K$ يشير إلى عدد المتغيرات كما سبق وأن بيّنا ذلك في الانحدار الخطي البسيط

2. اختبارات الفروض لمقدرات المربعات الصغرى.

لدينا

$$Y = XB + U$$
$$Y = X\hat{B} + E$$
$$\hat{Y} = X\hat{B}$$
$$\left.\begin{matrix} Y = X\hat{B} + E \\ \hat{Y} = X\hat{B} \end{matrix}\right\} Y - \hat{Y} = E$$

ولدينا:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} \cdot X'Y$$

ومنه

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'(XB + U)$$
$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'XB + (X'X)^{-1} X'U$$

ومنه

$$\hat{B} = B + (X'X)^{-1} X'U$$
$$E(\hat{B}) = B + (X'X)^{-1} X' E(U)$$
$$E(\hat{B}) = B$$

ولدينا مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة لمعاملات الانحدار

$$\Omega_{\hat{B}} = E\left[(\hat{B} - B)(\hat{B} - B)'\right]$$

4

ولدينا

$$(\hat{B}-B)=(X'X)^{-1}X'U$$
$$(\hat{B}-B)'=U'X(X'X)^{-1}$$

ومنه

$$\Omega_{\hat{B}}=(X'X)^{-1}X'E(UU')X(X'X)^{-1}$$

ولدينا بمصفوفة التباينات والتباينات المشتركة كما يلي لأخطاء U.

$$E(U'U)=\begin{bmatrix} E(U_1U_1) & E(U_1U_2) & \cdots & E(U_1U_n) \\ E(U_2U_1) & E(U_2U_2) & \cdots & E(U_2U_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(U_nU_1) & E(U_nU_2) & \cdots & E(U_nU_n) \end{bmatrix}$$

ومنه

$$=\begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$$

$$E(U'U)=\sigma_u^2 I$$

ومنه

$$\Omega_{\hat{B}}=\sigma_u^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}$$
$$=\sigma_u^2(X'X)^{-1}$$

5/

ومنه

$$\Omega_{\hat{B}} = \hat{\sigma}^2_u (X'X)^{-1}$$

وهي مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة لمعاملات الانحدار.

ولإجراء اختبار المعاملات الانحدار لدينا:

$$\frac{\hat{B}_i - B_i}{\sigma_{\hat{B}_i}} \sim N(0,1)$$

و

$$(n-k-1)\frac{\hat{\sigma}^2_{\hat{B}_i}}{\sigma^2_{\hat{B}_i}} \sim \chi^2_{n-k-1}$$

ومنه فإن

$$\boxed{t = \frac{\hat{B}_i - B_i}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_i}}}$$

في حالة $H_0 : B_i = 0$

$$\boxed{t = \frac{\hat{B}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_i}}}$$

ملاحظة: هذه القيمة هي القيمة المحسوبة لـ $t$ ثم نبحث عن القيمة الجدولية وفقا لدرجات الحرية ومستوى المعنوية ثم نقارن بين القيمة المحسوبة لـ $t$ والقيمة الجدولية لها وبعد ذلك نتخذ القرار.