جامعة محمد خيضر- بسكرة

كلية العلوم الإنسانية و الاجتماعية.

قسم العلوم الاجتماعية

الأستاذ: دخيلي ساعد.

سنة اولى جذع مشترك علوم اجتماعية

مقياس إحصاء استدلالي.

الفوج B03

سلسلة تمارين خاصة بمحور توزيع المعاينة

مثال1 : لنفرض أن لدينا مجتمع مكون من خمس وحدات (N=5) ، و كانت قيم ظاهرة معينة لهذه الوحدات هي 1.5،3،6،4.5،7.5

المطلوب :

أ- احسب الوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) .

ب- احسب الوسط الحسابي $\bar{X}$ لجميع العينات البسيطة الممكنة والتي حجم كل منها ثلاث وحدات، وكذلك حدد جدول التوزيع الاحتمالي للوسط الحسابي $\bar{X}$ ، ومنه احسب القيمة المتوقعة والتباين للمتغير $\bar{X}$.

ج- أحسب التباين S^2 لجميع العينات العشوائية الممكنة التي حجم كل منها ثلاث وحدات واكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير S^2 وتحقق من أن : $E(S^2) = \frac{N}{N-1}\sigma^2$

الحل :

أ- الوسط الحسابي وتباين المجتمع السابق :

$$\mu = \Sigma X_i / N = (1.5 + 3 + 6 + 4.5 + 7.5) / 5 = 4.5$$

$$\sigma^2 = \Sigma(X_i - \mu)^2 / N$$

$$\sigma^2 = [(1.5-4.5)^2 +(3-4.5)^2 (6-4.5)^2 +(4.5-4.5)^2 + (7.5-4.5)^2] / 5$$

$$\sigma^2 = 4.5$$

ب- بما أن السحب تم بدون إرجاع فان العينات الممكنة عددها عشرة وذلك حسب :

$$C_N^n = C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

والجدول الموالي يوضح مختلف هذه العينات وأوساطها الحسابية .

الجدول (1) العينات العشرة الممكنة والوسط الحسابي المقابل لكل منهما:

رقم العينة	القيم المختلفة للعينة x_i (x_1, x_2, x_3)	$\sum x_i$	$\bar{X}_i$
01	(1.5, 3, 6)	10.5	3.5
02	(1.5, 3, 4.5)	9	3
03	(1.5, 3, 7.5)	12	4
04	(1.5, 6, 4.5)	12	4
05	(1.5, 6, 7.5)	15	5
06	(1.5, 4.5, 7.5)	13.5	4.5
07	(3, 6, 4.5)	13.5	4.5
08	(3, 6, 7.5)	16.5	5.5
09	(3, 4.5 ,7.5)	15	5
10	(6, 4.5, 7.5)	18	6

ومن خلال هذا الجدول فإننا نستطيع تحديد جدول التوزيع الاحتمالي للوسط الحسابي ($\bar{X}$) لعينة عشوائية حجمها ثلاث وحدات ، وذلك كما يلي :

الجدول (2): التوزيع الاحتمالي للوسط الحسابي ($\bar{X}$) لعينة عشوائية حجمها ثلاث وحدات.

$\bar{x}_i$	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
$P(\bar{X}_i)$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10

انطلاقا من هذا الجدول فإن القيمة المتوقعة للوسط الحسابي ($\bar{X}$) هي:

$$E(\bar{x}) = \Sigma \bar{x}_i P(\bar{x}_i) \quad \ldots\ldots\ldots(7)$$

$$= 3(1/10) + 3.5(1/10) + 4(2/10) + 4.5(2/10) + 5(2/10) + 5.5(1/10)$$

$$+ 6(1/10) = 4.5$$

مما سبق نستنتج أن : $E(\bar{x}) = \mu = 4.5$

أما تباين الوسط الحسابي للعينة فيحسب بالعلاقة التالية :

$$Var(\bar{x}) = E(\bar{x})^2 - [E(\bar{x})]^2 \ldots\ldots\ldots(8)$$

حيث:

$$E(\bar{x})^2 = \Sigma \bar{x}_i^2 . P(\bar{x}_i)$$

$$= 3^2(1/10)+3.5^2(1/10)+4^2(2/10)+4.5^2(2/10)+5^2(2/10)+$$

$$(5.5)^2(1/10)+6^2(1/10) = 21$$

$$\Rightarrow Var(\bar{x}) = 21-(4.5)^2 = \mathbf{0.75}$$

ج- حساب التباين S^2 لجميع العينات العشوائية الممكنة: ويتم ذلك كما يلي:

$$S^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2 / n-1$$

$$= \Sigma(x_i - \bar{x})^2 / 3-1$$

ويمكن تلخيص قيم S^2 المناظرة لكل عينة من العينات العشرة الممكنة في الجدول (3).

الجدول (3): قيم S^2 المناظرة للعينات العشرة:

رقم العينة	القيم المختلفة للعينة (X_1,X_2,X_3)	$\bar{X}$	$\Sigma(x_i-\bar{x})^2$	S^2
1	(1.5, 3, 6)	3.5	10.5	5.25
2	(1.5, 4.5, 3)	3	4.5	2.25
3	(1.5, 3, 7.5)	4	19.5	9.75
4	(1.5, 6, 4.5)	4	10.5	5.25
5	(1.5, 6, 7.5)	5	19.5	9.75
6	(1.5, 4.5 ,7.5)	4.5	18	9
7	(3, 6, 4.5)	4.5	4.5	2.25
8	(3, 6, 7.5)	5.5	10.5	5.25
9	(3, 4.5, 7.5)	5	10.5	5.25
10	(6, 4.5, 7.5)	6	4.5	2.25

وانطلاقا من هذا الجدول فانه يمكنا الحصول على التوزيع الاحتمالي للمتغير S^2 كما هو موضح في الجدول (4) التالي:

الجدول (4): التوزيع الاحتمالي للمتغير S^2.

S^2	2.25	5.25	9	9.75
$P(S^2)$	3/10	4/10	1/10	2/10

إذن من خلال الجدول (4) نجد :

$$E(S^2) = \sum S^2 . P(S^2) \qquad (9)$$

$$= 2.25(\frac{3}{10}) + 5.25(4/10) + 9(1/10) + 9.75(2/10)$$

$$= 5.625$$

التحقق من أن : $E(S^2) = \frac{N}{N-1}\sigma^2$

من المعادلة (4) نجد: $\frac{N}{N-1}\sigma^2 = [5/(5-1)]4.5 = 5.625$

إذن نستنتج أن: $\mathbf{E(S^2) = \frac{N}{N-1}\sigma^2}$

مثال رقم 02: إذا كانت رواتب المعلمين في وزارة التربية والتعليم تخضع لتوزيع طبيعي وسطه 33000 دج وانحرافه المعياري 5165 دج ، ورواتب المعلمين في المدارس الخاصة تخضع لتوزيع طبيعي وسطه 25740 دج وانحرافه المعياري 5663 دج.

أخذت عينة عشوائية من المعلمين في الوزارة حجمها 16 معلما وعبرنا عن وسطها الحسابي بالرمز $\bar{X}_1$ ، وأخذت عينة عشوائية من معلمي المدارس الخاصة حجمها 10 معلمين وعبرنا عن وسطها الحسابي بالرمز $\bar{X}_2$.

المطلوب : أوجد احتمال أن يزيد $\bar{X}_1$ عن $\bar{X}_2$ بمقدار 8000 دج.

الحل :

نريد إيجاد الاحتمال التالي : $P(\bar{X}_1-\bar{X}_2\geq 8000)$

بتطبيق النظرية (4) نجد :

$$Z=[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)]\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$Z=[(8000)-(33000-25740)]\Big/\sqrt{\frac{5165^2}{16}+\frac{5663^2}{10}}$$

$$Z=0.33$$

ومنه نجد :

$$P(\bar{X}_1-\bar{X}_2\geq 8000)=P(Z\geq 0.33)=0.5-0.1293=0.3707$$

مثال رقم 03 : إذا كان الإنفاق الاستهلاكي العائلي اليومي في ولاية باتنة وسطه الحسابي 1500دج وتباينه 600 دج ، وكان الإنفاق الاستهلاكي العائلي اليومي في ولاية بسكرة وسطه الحسابي 1000دج وتباينه 450 دج ، فإذا سحبنا من ولاية باتنة عينة عشوائية حجمها 150 عائلة ، ومن ولاية بسكرة عينة عشوائية حجمها 100 عائلة ، وكانت العينتان مستقلتان والمجتمعين غير خاضعين للتوزيع الطبيعي

المطلوب : أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكثر من 510 دج.

الحل: بما أن تبايني المجتمعين معلومين ، وحجم العينتين كبير بدرجة كافية ،فان المتغير $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)$ سيتوزع توزيعا قريبا من التوزيع الطبيعي بالرغم من أن توزيع المجتمعين غير طبيعي .

والمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي : $P(\bar{X}_1-\bar{X}_2>510)$

بتطبيق النظرية (5) نجد :

$$Z=[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)]\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$Z=[(510)-(1500-1000)]\Big/\sqrt{\frac{600}{150}+\frac{450}{100}}$$

$$Z=3.43$$

$$P(\bar{X}_1-\bar{X}_2>510)=P(Z>3.43)=0.5-0.4997=0.0003$$

مثال رقم 03 سحبت عينة عشوائية حجمها 16 وحدة من مجتمع طبيعي وسطه 30 وتباينه σ_1^2 مجهول، وسحبت أيضا عينة عشوائية حجمها 25 وحدة من مجتمع طبيعي آخر مستقـل عن الأول وسطه 28 وتباينه σ_2^2 مجهول أيضا .وكـان $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ هما الوسطين الحسابيين للعينتين الأولى والثانية على الترتيب، وتباين العينة الأولى هو 4 ، وتباين العينة الثانية هو 7 .

المطلوب : إذا كان تبايني المجتمعين متساويين فأوجد احتمال أن الفرق بين متوسطي العينتين يكـون أقل من 3 .

الحل:

لدينا: $n_1 = 16$ ، $n_2 = 25$، $s_1^2 = 4$ ، $s_2^2 = 7$

$\mu_1 = 30$ ، $\mu_2 = 28$

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين فإننا نستخدم توزيع t بدرجة حرية (n_1+n_2-2)

وذلك لإيجاد الاحتمال التالي :

لدينا:

$$P(\bar{X}_1-\bar{X}_2<3) = P\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} < \frac{(3)-(30-28)}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{16}+\frac{1}{25})}}\right)$$

الآن نقوم بحساب s_p^2 ، حيث :

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)\,s_1^2 + (n_2-1)\,s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$s_p^2 = \frac{(16-1)4+(25-1)7}{16+25-2} = 5.84$$

ومنه يكون :

$$P(\bar{X}_1-\bar{X}_2<3) = P\left(T<\frac{1}{\sqrt{5.84(\frac{1}{16}+\frac{1}{25})}}\right)$$

$$= P(T<1.30)$$

عند درجات الحرية : $n_1+n_2-2 = 16+25\text{-}2 = 39$

نجـد : $P(\bar{X}_1-\bar{X}_2<3) = 0.9$

مثال رقم 04 إذا كانت نقاط طلبة السنة ثانية (ل.م.د) إدارة أعمال في مقياس الإحصاء لديها وسط حسابي قدره 15، وكانت نقاط طلبة السنة ثانية (ل.م.د) محاسبة في نفس المقياس لديها وسط حسابي قدره 10. وقمنا بسحب عينة من طلبة السنة ثانية (ل.م.د) إدارة أعمال حجمها 25 طالب، وقمنا أيضا بسحب عينة من طلبة السنة ثانية (ل.م.د) محاسبة حجمها 20 طالبا. فإذا كان تباين العينة الأولى هو 6 وتباين العينة الثانية هو 4.

المطلوب: أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكثر من 6، هذا إذا كان تباينـي المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

الحل:

لدينا:

$$n_1 = 25 ، n_2 = 20، s_1^2 = 6 ، s_2^2 = 4$$

$$\mu_1 = 15 ، \mu_2 = 10$$

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين فإننا نستخدم توزيع t بدرجة حرية لها الصيغة المركبة الموضحة في العلاقة (26) وذلك لإيجاد الاحتمال التالي:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 6)$$

ومنه يكون:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 6) = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} > \frac{(6) - (15 - 10)}{\sqrt{\frac{6}{25} + \frac{4}{20}}}\right)$$

ومنه:

$$= P(T > 1.51)$$

عند درجات الحرية:

$$\upsilon = \left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2 - 1)}}\right) = \left(\frac{\left(\frac{6}{25} + \frac{4}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{6}{25}\right)^2}{(25 - 1)} + \frac{\left(\frac{4}{20}\right)^2}{(20 - 1)}}\right) = 43$$

نجـــد:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 6) = 0.05$$

مثال رقم 05 إذا كانت S^2 هو تباين عينة عشوائية ذات الحجم 4 وحدات مسحوبة من مجتمع له توزيع طبيعي تباينه25.

المطلوب: أ- أوجد احتمال أن تباين العينة سوف يكون 2.5 أو أقل.

ب- أوجد احتمال أن تباين العينة سوف يتعدى 66.

الحل:

أ- بتطبيق الصيغة (28) نجد :
$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{3S^2}{25}$$

لها توزيع كآي تربيع بدرجات حرية: $\upsilon = n-1 = 4-1 = 3$

ومنه يكون :
$$P(S^2 \leq 2.5) = 1 - P(S^2 > 2.5)$$

$$\Rightarrow P(S^2 > 2.5) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{3(2.5)}{25}\right)$$
$$= P(\chi^2 > 0.3)$$

وباستخدام جدول توزيع كآي تربيع بالملحق رقم (3) نجد: $P(\chi^2 > 0.3) \cong 0.95$

أي أن :
$$P(S^2 > 2.5) = P(\chi^2 > 0.3) \cong 0.95$$

وفي الأخير نجد :
$$P(S^2 \leq 2.5) = 1 - P(S^2 > 2.5)$$
$$= 1 - 0.95 = 0.05$$

ب- إيجاد الاحتمال التالي:
$$P(S^2 > 66) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{3(66)}{25}\right)$$
$$= P(\chi^2 > 7.92)$$

عند درجات الحرية : $\upsilon = 3$ ، نجـــد: $P(\chi^2 > 7.92) \cong 0.05$

أي أن :
$$P(S^2 > 66) = P(\chi^2 > 7.92) \cong 0.05$$

تمارين المحور الأول :

التمرين 01 : مجتمع إحصائي يتكون من أوزان 3000 طالب في جامعة محمد خيضر ببسكرة ، وإذا كان هذا المجتمع يتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 68 كغ وانحراف معياري 03 كغ ، قمنا بسحب 80 عينة ، حجم كل منها 25 طالب .

المطلوب:

1- حدد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة ؟.

2- ما هو عدد العينات التي نتوقع أن نجد الوسط الحسابي فيها يقع بين 66.8 كغ و68.3 كغ ؟.

التمرين 02 : مصنع ينتج كراسي ترتكز على قاعدة دائرية ، اعتمادا على التجارب السابقة فان مفتش الرقابة على العملية الإنتاجية مقتنع بأن. متوسط قطر القاعدة الدائرية هو 5 سم، الانحراف المعياري لها هو : 0.005 سم. توزيع العملية الإنتاجية هو التوزيع الطبيعي.

يهتم الفاحص بالمحافظة على متوسط قطر العملية الإنتاجية عند 5 سم، ولتحقيق ذلك تم سحب عينات عشوائية بصفة دورية حجم كل منها 09 كراسي وذلك في محاولة الاكتشاف لأي انحرافات عن الأرقام المشار إليها سابقا.

المطلوب:

1- حدد توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ ؟.

2- إذا كان متوسط أقطار قاعدة الكراسي في العينة المسحوبة هو 5.004 سم ، فما هو احتمال أن يكون هذا المتوسط على الأقل 5.004 سم ؟

3- ما هو حجم العينة التي يجب سحبها لتحقيق خطأ معياري للوسط الحسابي قدره: 0.001 سم

4- في السؤال (ج) لماذا يفضل الفاحص أن يكون الخطأ المعياري للوسط الحسابي يساوي 0.001 على أن يكون الخطأ المعياري كما حصلت عليه في السؤال (أ) ؟.

التمرين 03: تخضع أوزان عبوات احد مبيدات الحشرات المنزلية لتوزيع وسطه 135غ وانحرافه المعياري 14غ. إذا قررت الجهة الوصية عن مراقبة العبوات رفض كل صندوق من هذه العبوات إذا نقص وزنه عن: 6.24كغ.

المطلوب:ما هي نسبة الصناديق المرفوضة إذا علمت أن عدد العبوات في كل صندوق هو:48 عبوة ؟.

التمرين 04 : حدد ما يلي:

1- قيمة T بدرجات حرية 12 والتي تترك مساحة على يمينها تساوي 0.975 .

2- قيمة T بدرجات حرية 10 والتي تترك مساحة على يسارها تساوي 0.05 .

التمرين 05: ليكن X متغيرا عشوائيا يمثل إنتاج البيض من مزرعة للدجاج البياض، وكانت أوزان البيض تأخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي قدره 55غ ، وإذا تم أخذ عينة حجمها 25 بيضة ،ووجد أن الانحراف المعياري للبيض يساوي 10غ .

المطلوب: أوجد احتمال أن يزيد الوسط الحسابي لهذه العينة عن 60غ.

التمرين 06: إذا كان طول طلبة السنة أولى جامعي يأخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي قدره 166سم ،وأخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا فوجد أن الانحراف المعياري لأطوالهم 8سم.

المطلوب:أوجد احتمال أن يزيد متوسط طول الطلبة في العينة عن 170سم.

التمرين 07 : مصنع لإنتاج السجائر يدعي أن أحد العلامات التي ينتجها تحتوي على النيكوتين في المتوسط 0.6 ملغ لكل سيجارة. قامت إحدى المنظمات المستقلة بقياس محتوى النيكوتين في عينة مكونة من 16 سيجارة وحددت بها متوسط كمية النيكوتين في السيجارة وكذلك الانحراف المعياري ليكونا: 0.75 ، 0.175 ملغ على التوالي . مفترضا أن محتوى النيكوتين في هذه السجائر يناسبه التوزيع الطبيعي.

المطلوب: أوجد احتمال أن يكون متوسط النيكوتين في العينة هو 0.75 ملغ أو أكثر، هذا على افتراض أن ادعاء المصنع كان صحيحا.

التمرين 08: إذا كان متوسط العمر الإنتاجي للمصابيح الكهربائية التي ينتجها المصنع A هو 1400 ساعة وانحرافها المعياري هو 200 ساعة، بينما تلك التي ينتجها المصنع B فإن متوسط عمرها الإنتاجي هو 1200 ساعة وانحرافها المعياري 100 ساعة.إذا سحبت عينة عشوائية مكونة من : 125 مصباح من كل مصنع وتم اختبارها.

المطلوب: اوجد احتمال أن يزيد متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح المصنع A عن متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح المصنع B بمقدار 250 ساعة؟.

التمرين09 : سحبت عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي : 40، 60 من مجتمعين طبيعيين متوسطيهما 74 ، 71 وتباينهما 100 ، 144 على الترتيب.

المطلوب : احسب احتمال أن الوسط الحسابي للعينة الأولى سوف يزيد عن الوسط الحسابي للعينة الثانية بما لا يقل عن 2 ؟.

التمرين 10: أخذت عينة عشوائية حجمها 18 من مجتمع إحصائي معين وسطه 35، وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 22 من مجتمع إحصائي آخر وسطه 33، فإذا كان تباين العينتين هما على التوالي 6 ، 9 ، وكان تباين المجتمعين مجهولين ومتساويين.

المطلوب: أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي هاتين العينتين أقل من 3.

التمرين 11: عينة عشوائية حجمها 16 وانحرافها المعياري 12 أخذت من مجتمع إحصائي معين وسطه 70، ثم بعد ذلك تم أخذ عينة عشوائية أخرى حجمها 9 وانحرافها المعياري 16 من مجتمع آخر مستقل عن الأول وسطه 74، وإذا كان تباين المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

المطلوب: أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي هاتين العينتين 8 أو أكثر.

التمرين 12: في ظل شروط الاعتدالية (الطبيعية)، كان متوسط أداء عملية معينة في إحدى الخطوات هو 7.5 دقيقة بانحراف معياري قدره 0.5 دقيقة، وبهدف اكتشاف الانحراف عن الاعتدالية، يقوم مدير الخطة بسحب عينات عشوائية بصفة دورية حجم كل منها 16 عملية.

المطلوب: بفرض أن توزيع المجتمع لأزمنة أداء تلك العمليات هو التوزيع الطبيعي، أوجد احتمال أن تباين العينة يتعدى 0.64.

التمرين 13: باستخدام جداول توزيع فيشر أوجد القيم التالية:

$$F(0.05,5.8)\ ,\ F(0.05,2.9)\ ,\ F(0.01,4.10)$$

$$F(0.01,5.12)\ ,\ F(0.95,3.9)\ ,\ F(0.99,4.10)$$

التمرين 14: أخذت عينة عشوائية حجمها 11 من مجتمع $\mathbf{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ ، وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 16 من مجتمع $\mathbf{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$ مستقل عن الأول.

المطلوب: حدد الاحتمال التالي: $p(\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \geq 3.80)$

التمرين 15: أخذت عينة عشوائية حجمها 100 من مجتمع معين فيه $P = 0.4$

المطلوب: حدد توزيع المعاينة لنسبة العينة، وما هي قيمة التوقع والخطأ المعياري في هذا التوزيع ؟.

التمرين 16: إذا كان احتمال نجاح الطالب الذي يدرس أحد مقررات الاقتصاد هو 0.9 ، أخذت عينة عشوائية حجمها 49 طالبا من أولئك الذين يدرسون هذا المقرر .

المطلوب: أوجد احتمال أن تكون نسبة نجاح الطالب الذي يدرس هذا المقرر في العينة على الأقل 0.8 ؟.

التمرين 17: إذا كان العدد الكلي لطلبة كلية الحقوق والعلوم السياسية في العام الدراسي 2010-2011 هو 8703 طالبا وطالبة، منهم 3352 ذكورا، فإذا سحبنا من هذه الكلية في تلك السنة عينة عشوائية تشمل 55 طالبا وطالبة.

المطلوب: ما هو احتمال أن تكون نسبة الذكور في هذه العينة أكثر من 50 %.

التمرين 18: لوحظ أن نسبة المتخلفين عن المقابلة ممن يتقدمون لشغل وظائف في وزارة التربية والتعليم عادة ما تكون 0.1 ، أخذت عينة عشوائية حجمها 100 من المطلوبين للمقابلة.

المطلوب: ما هو احتمال أن تقل نسبة عدد المتخلفين عن 0.15؟.

التمرين 19: أخذت عينة عشوائية حجمها 30 من مجتمع ذي الحدين فيه نسبة النجاح 70% ، وأخذت عينة عشوائية حجمها 45 من مجتمع آخر مستقل عن الأول وكانت نسبة النجاح فيه50 %

المطلوب: أوجد احتمال أن الفرق بين نسبتي النجاح في العينتين يكون أكبر من 20 %.

التمرين 20: إذا كانت نسبة الناجحات من الطالبات المشتركات في امتحان لمقياس الرياضيات 60 % ونسبة الناجحين من الطلبة المشتركين في نفس الامتحان 56 % ، فإذا اخترنا عينتين مستقلتين ، الأولى تشمل 100 طالبة ، والثانية تشمل 150 طالبا من الطالبات والطلبة الذين اشتركوا في هذا الامتحان.

المطلوب: ما هو احتمال أن تكون نسبة الناجحات في عينة الطالبات أكبر من نسبة الناجحين في عينة الطلبة بمقدار 5 % أو أكثر ؟

التمرين 21: إذا كانت نسبة التالف في إنتاج الآلة (A) 7% ، ونسبة نسبة التالف في إنتاج الآلة (B) 5% ، فإذا سحبنا مع الإرجاع عينتين مستقلتين : الأولى من إنتاج الآلة الأولى وتشمل 36 وحدة ، والثانية من إنتاج الآلة الثانية وتشمل 64 وحدة .

المطلوب: ما هو احتمال أن تكون نسبة التالف في عينة الآلة (A) أكبر من نسبة التالف في عينة الآلة (B) بمقدار 1.8% ؟.

حلول تمارين المحـــور الأول

التمرين 01: لدينـــا المعطيات التالية:

$$n = 25 \quad ، \quad \mu = 68kg \quad ، \quad \sigma = 3kg \quad ، \quad N = 3000$$

1- حساب $\mu_{\bar{X}}$ و $\sigma_{\bar{X}}$:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 68kg$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{أو} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

وعليه يجب أن نتحقق من الشرط التالي الذي يحدد الصيغة المستخدمة في حساب $\sigma_{\bar{X}}$

$$n \geq \%5\, N \Leftrightarrow 25 \geq (0.05).(3000)$$
$$\Leftrightarrow 25 < 150$$

بما أن الشرط غير محقق فإننا لا نستخدم معامل التصحيح في حساب $\sigma_{\bar{X}}$ ، وبالتالي فإن :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = 0.6kg$$

2- تحديد عدد العينات التي يكون فيها الوسط الحسابي محصور بين القيمتين 66.8kg و 68.3kg

يجب أن نحدد أولا الاحتمال التالي: $P(66.8 < \bar{x} < 68.3)$

$$P(66.8 < \bar{x} < 68.3) = P\left(\frac{66.8-68}{0.6} < Z < \frac{68.3-68}{0.6}\right)$$

$$= P(-2 < Z < 0.5)$$

$$= P(0 < Z \leq 0.5) + P(-2 \leq Z < 0)$$

$$= 0.1915 + 0.4772 = 0.6687$$

ومنه فإن عدد العينات المطلوب هو :

$80.(0.6687) \approx 53$ عينة

التمرين 02:

لدينا: $\mu = 5 \quad ، \quad \sigma = 0.005 \quad ، \quad n = 9$

1- تحديد توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$:

بما أن توزيع العملية الإنتاجية هو التوزيع الطبيعي ، له متوسط قدره 5 سم وانحراف معياري 0.005 سم ، فإن توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$ يكون أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 5 سم وانحراف معياري قدره :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.005}{\sqrt{9}} = 0.00166$$

2- إيجاد الاحتمال التالي: $P(\bar{x} \geq 5.004)$

$$P(\bar{x} \geq 5.004) = P\left(Z > \frac{5.004-5}{0.00166}\right)$$

$$= P(Z \geq 2.44)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z \leq 2.44)$$

$$= 0.5 - 0.4918$$

$$= 0.0082$$

3- حساب حجم العينة إذا كان $\sigma_{\bar{X}} = 0.001$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.001 \Leftrightarrow \frac{0.005}{\sqrt{n}} = 0.001$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0.005}{0.001} = 5$$

$$\Rightarrow n = 25$$

4- يفضل الفاحص أو المفتش أن يكون الخطأ المعياري للوسط الحسابي يساوي 0.001 علــى أن يكون هذا الخطأ 0.00166 ، وهذا لأن الخطــأ المعياري 0.001 هو اصغر من الخطــأ المعياري 0.00166 وعليه لو أعدنا حساب الاحتمال في السؤال الثاني بهذا الخطــأ فان هذا الأخير سوف يكون أدق مـــن الاحتمال في شكله الأول.حيث نجد أن الاحتمال الجديد يساوي:

$$P(\bar{x} \geq 5.004) = 0.0001$$

وهو احتمال ضئيل جدا مقارنة مع الاحتمال الذي حصلنا عليه من قبل ، وبالتالي فان هذا يعتبر سببا أكثر قناعة لتصديق بأن الانحراف عن $\mu = 5$ قد حدث فعلا . وفي حالة ما إذا كان هذا الاحتمال كبير جدا فهذا يعني أن هناك سببا ضعيفا لكي نشك في وقوع انحراف عن متوسط العملية الإنتاجية.

التمرين 03:

لدينا : $\mu = 135g$ ، $\sigma = 14g$ ، $n = 48$

ونريد حساب احتمال أن ينقص وزن الصندوق عن 6.24 كغ او 6240 غ.

نفترض أن أوزان العبوات في صندوق ما هي : $X_1 , X_2 ,\ldots\ldots, X_{48}$ ، وبالتالي فالمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي : $P(\sum_{i=1}^{48} X_i < 6240)$

ومنه بقسمة طرفي المتراجحة على 48 يكون :

$$P(\sum_{i=1}^{48} X_i < 6240) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{48} X_i}{48} < \frac{6240}{48} \right) = P(\overline{x} < 130)$$

بما أن شروط نظرية تقارب التوزيعات متحققة ، حيث الانحراف المعياري للمجتمع معلوم وحجم العينة كبير بدرجة كافية ، فانه بإمكاننا تطبيق تلك النظرية في إيجاد الاحتمال السابق ، أي :

$$P(\overline{x} < 130) = P\left(Z < \frac{130-135}{\frac{14}{\sqrt{48}}}\right)$$

$$= P\,(Z < -2.47)$$

$$= 0.5 - P(-2.47 \le Z < 0)$$

$$= 0.5 - 0.4932$$

$$= 0.0068 \approx 0.007$$

أي أن الجهة الوصية عن مراقبة العبوات سوف ترفض 7 بالألف من الصناديق تقريبا.

التمرين 04:

1- من خاصية التماثل لتوزيع t نلاحظ أن :

$$t_{(0.975,12)} = -t_{(0.025,12)} = -2.179$$

$$t_{(0.05,10)} = -1.812$$

-2

التمرين 05:

بما أن تباين المجتمع مجهول ، وحجم العينة صغير فان توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{X}$ يخضع لتوزيع ستيودنت بدرجات حرية $(\upsilon = n-1 = 25-1 = 24)$.

وعليه فان :

$$P(\overline{X} > 60) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > \frac{60-55}{\frac{10}{\sqrt{25}}}\right)$$

$$= P\ (T > 2.5)$$

$$= 1 - P(T \leq 2.5)$$

$$= 1 - 0.99 = 0.01$$

التمرين 06:

بما أن تباين المجتمع مجهول ، وحجم العينة صغير فان توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{X}$ يخضع لتوزيع ستيودنت بدرجات حرية $(\upsilon = n-1 = 16-1 = 15)$.

وبالتالي يكون :

$$P(\overline{X} > 170) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > \frac{170-166}{\frac{8}{\sqrt{16}}}\right)$$

$$= P\ (T > 2)$$

$$= 1 - P(T \leq 2)$$

$$= 1 - 0.975 = 0.025$$

التمرين 07:

بنفس الطريقة ، نلاحظ أن تباين المجتمع مجهول ، وحجم العينة صغير ، وعليه فان توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{X}$ يخضع لتوزيع ستيودنت بدرجات حرية $(\upsilon = n-1 = 16-1 = 15)$.

وبالتالي يكون :

$$P(\bar{X} \geq 0.75) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq \frac{0.75-0.6}{\frac{0.175}{\sqrt{16}}}\right)$$

$$= P(T \geq 3.428)$$

$$= 1 - P(T < 3.428)$$

$$= 1 - 0.999 = 0.001$$

وهو المطلوب

التمرين **08**:

لدينا $\mu_1 = 1400 , \quad \mu_2 = 1200 , \quad \sigma_1 = 200 , \quad \sigma_2 = 100$

$$n_1 = 125 \quad , n_2 = 125$$

والمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي :

$$P(\bar{X}_1 > \bar{x}_2 + 250) = P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) > 250]$$

بتطبيق النظرية الرابعة نجد :

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) > 250] = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > \frac{(250) - (200)}{\sqrt{\frac{200^2}{125} + \frac{100^2}{125}}}\right)$$

$$= P(Z > 2.5)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z \leq 2.5)$$

$$= 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

التمرين **09**:

لدينا $\mu_1 = 74 , \quad \mu_2 = 71 , \quad \sigma_1^2 = 100 , \quad \sigma_2^2 = 144$

$$n_1 = 40 \quad , n_2 = 60$$

والمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي :

$$P(\bar{X}_1 > \bar{X}_2 + 2) = P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) > 2]$$

نطبق النظرية الرابعة كذلك نجد :

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) > 2] = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > \frac{(2) - (74-71)}{\sqrt{\frac{100}{40} + \frac{144}{60}}}\right)$$

$$= P(Z > -0.45)$$

$$= 0.5 + P(-0.45 \leq Z < 0)$$

$$= 0.5 + 0.1736 = 0.6736$$

التمرين **10**:

لدينا: $s_2^2 = 9$ ، $s_1^2 = 6$ ، $n_2 = 22$ ، $n_1 = 18$ ، $\mu_2 = 33$ ، $\mu_1 = 35$

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين ، والعينتان مستقلتان وصغيرتا الحجم فإننا نستخدم توزيع t بدرجة حرية $(n_1 + n_2 - 2)$ وذلك لإيجاد الاحتمال التالي : $P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) < 3]$

لدينا:

$$P[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) < 3] = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} < \frac{(3) - (35-33)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{22}\right)}}\right)$$

الآن نقوم بحساب s_p^2 ، حيث :

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$s_p^2 = \frac{(18-1)6 + (22-1)9}{18+22-2} = 7.66$$

ومنه يكون :

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)<3]=P\left(T<\frac{1}{\sqrt{7.66\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{22}\right)}}\right)$$

$$=P(T<1.136)$$

عند درجات الحرية : $n_1+n_2-2=18+22-2=38$

نجد : $P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)<3]=0.9$

التمرين **11**:

لدينا: $\mu_1=70$ ، $\mu_2=74$ ، $n_1=16$ ، $n_2=9$ ، $S_1=12$ ، $S_2=16$

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين، والعينتان مستقلتان وصغيرتا الحجم فإننا نستخدم توزيع t بدرجة حرية لها الصيغة المركبة، وذلك لإيجاد الاحتمال التالي: $P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\geq 8]$

إذن:

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\geq 8]=P\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\geq\frac{(8)-(70-74)}{\sqrt{\frac{12^2}{16}+\frac{16^2}{9}}}\right)$$

$$=P(T\geq 1.96)$$

$$=1-P(T<1.96)$$

عند درجات الحرية :

$$\upsilon=\left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}}\right)=\left(\frac{\left(\frac{12^2}{16}+\frac{16^2}{9}\right)^2}{\frac{\left(\frac{12^2}{16}\right)^2}{(16-1)}+\frac{\left(\frac{16^2}{9}\right)^2}{(9-1)}}\right)=13$$

يكون:

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\geq 8]=1-P(T<1.96)=1-0.95=\mathbf{0.05}$$

التمرين **12**: لدينا:
$\mu = 7.5$ ، $\sigma = 0.5$ ، $n = 16$

والمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي : $P(S^2 > 0.64)$

بتطبيق الصيغة (28) نجد :
$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{15S^2}{0.25}$$

لها توزيع كاي تربيع بدرجات حرية: $\upsilon = 16-1 = 16-1 = 15$

ومنه:
$$P(S^2 > 0.64) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{15(0.64)}{0.25}\right)$$
$$= P(\chi^2 > 38.4) = \mathbf{0.005}$$

التمرين **13**: باستخدام جداول توزيع فيشر نجد:

$F(0.05, 5, 8) = 0.21$ ، $F(0.05, 2, 9) = 0.05$

$F(0.01, 4, 10) = 0.07$ ، $F(0.01, 5, 12) = 0.1$

$F(0.95, 3, 9) = 3.86$ ، $F(0.99, 4, 10) = 5.99$

التمرين **14**: لدينا : $n_1 = 11$ ، $n_2 = 16$

والمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي :
$$P\left[\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\right) \geq 3.80\right]$$

باستخدام توزيع فيشر عند درجتي الحرية:
$$\upsilon_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = \mathbf{10}, \quad \upsilon_2 = n_2 - 1 = 16 - 1 = \mathbf{15}$$

نجد:
$$P\left[\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\right) \geq 3.80\right] = P(F \geq 3.80)$$
$$= 1 - P(F < 3.80)$$
$$= 1 - 0.99 = \mathbf{0.01}$$

التمرين **15**: البيانات المتوافرة لدينا هي:

نسبة المجتمع $0.40 = P$ حجم العينة $= 100$

تحديد توزيع المعاينة لنسبة العينة:

بما أن : $np = 100\,(0.4) = 40$, $nq = 100\,(0.6) = 60$

أي أن كلا من np و nq أكبر من 5 ، وبالتالي فان توزيع المعاينة للنسبة $\bar{p}$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين قدرهما على التوالي كما يلي :

$$\mu_{\bar{p}} = P = 0.4$$

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{Pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{100}} = 0.049$$

التمرين **16**: البيانات المتوفرة لدينا هي:

نسبة المجتمع $0.9 = P$ حجم العينة $= 49$

والمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي:

$$P(\bar{p} \geq 0.80) = P\left(Z \geq \frac{0.8 - 0.9}{\sqrt{\frac{(0.9)(0.1)}{49}}}\right)$$

$$= P(Z \geq -2.33)$$

$$= 0.5 + P(-2.33 \leq Z < 0)$$

$$= 0.5 + 0.4901 = 0.9901$$

التمرين **17**:

لدينا : $n = 55$ ، $X = 3352$ ، $N = 8703$ ، $P = \frac{X}{N} = \frac{3352}{8703} = 0.385$

والمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي:

$$P(\bar{p} > 0.5) = P\left(Z > \frac{0.5 - 0.385}{\sqrt{\frac{(0.385)(0.615)}{55}}}\right)$$

$$= P(Z > 1.75)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z \leq 1.75)$$

$$= 0.5 - 0.4599 = 0.0401$$

التمرين 18: البيانات المتوافرة لدينا هي:

نسبة المجتمع $P = 0.1$ حجم العينة $= 100$

المطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي:

$$P(\bar{p} < 0.15) = P\left(Z < \frac{0.15 - 0.1}{\sqrt{\frac{(0.1)(0.9)}{100}}} \right)$$

$$= P(Z < 1.67)$$

$$= 0.5 + P(0 < Z \leq 1.67)$$

$$= 0.5 + 0.4525 = 0.9525$$

التمرين 19:

لدينا: $n_1 = 30$ ، $n_2 = 45$ ، $P_1 = 0.7$ ، $P_2 = 0.5$

بما أن n_1 و n_2 كبيرتان ، فان توزيع المعاينة للإحصائية $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي ، وبالتالي فان الاحتمال المطلوب يتم حسابه كما يلي :

$$P\,[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) > 0.2\,] = P(Z > z)$$

حيث أن:

$$z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}} = \frac{(0.2) - (0.7 - 0.5)}{\sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{30} + \frac{0.5 \times 0.5}{45}}}$$

$$= 0$$

إذن:

$$\boldsymbol{P}\,[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) > 0.2] = P(Z > 0) = 0.5$$

التمرين 20: البيانات المتوافرة لدينا هي:

P_1 : تمثل نسبة الطالبات الناجحات في امتحان الرياضيات وهي تساوي : 0.6

P_2 : تمثل نسبة الطلبة الناجحين في امتحان الرياضيات وهي تساوي : 0.56

$n_1 = 100$ ، $n_2 = 150$

بما أن n_1 و n_2 كبيرتان ، فإن توزيع المعاينة للإحصائية $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي ، والمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي :

$$P(\bar{p}_1 \geq \bar{p}_2 + 0.05) = P[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \geq 0.05]$$

وعليه يكون :

$$P[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \geq 0.05] = P(Z \geq z)$$

حيث:

$$z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}} = \frac{(0.05) - (0.6 - 0.56)}{\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{100} + \frac{0.56 \times 0.44}{150}}}$$

$$= 0.16$$

إذن يكـــون:

$$\boldsymbol{P}[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \geq 0.05] = P(Z \geq 0.16)$$

$$= 0.5 - \boldsymbol{P}(0 < Z \leq 0.16)$$

$$= 0.5 - 0.0636 = 0.4361$$

التمرين 21:

البيانات المتوافرة لدينا هي:

P_1 : تمثل نسبة التالف في إنتاج الآلة A وهي تساوي : 0.07

P_2 : تمثل نسبة التالف في إنتاج الآلة B وهي تساوي: 0.05

$n_1 = 36$ ، $n_2 = 64$

بما أن n_1 و n_2 مستقلتان وكبيرتا الحجم ، فإن توزيع المعاينة للإحصائية $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي ، والمطلوب هو إيجاد الاحتمال التالي :

$$P(\bar{p}_1 > \bar{p}_2 + 0.018) = P[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) > 0.018]$$

وعليه يكون :

$$P[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) > 0.018] = P(Z > z)$$

حيث:

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1} + \frac{P_2 q_2}{n_2}}} = \frac{(0.018) - (0.07 - 0.05)}{\sqrt{\frac{0.07 \times 0.93}{36} + \frac{0.05 \times 0.95}{64}}}$$

$$= -0.04$$

وبالتالي يكـــون:

$$P[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) > 0.018] = P(Z > -0.04)$$

$$= 0.5 + P(-0.04 \leq Z < 0)$$

$$= 0.5 + 0.0160 = 0.516$$