جامعة محمد خيضر -بسكرة-

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم علوم المادة

السنة الجامعية :2020/2019

السنة : ثانـية فيـــــزياء

مقياس ميكانيك الـكم

السلســلة-5-

التمرين 1:

تعرف $\{ |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle \}$ بأنها الأساس المتعامد في الفضاء

وتمثل بواسطة المصفوفات : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

باعتبار A مؤثر خطي والذي يعرف بالعلاقات التالية :

$A|\psi_1\rangle = (1+i)|\psi_1\rangle + 2|\psi_2\rangle - |\psi_3\rangle$

$A|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle + 2|\psi_2\rangle$

$A|\psi_3\rangle = 2|\psi_1\rangle - 3|\psi_3\rangle$

أعط التمثيل المصفوفي ل A ؟

بأخذ: $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + i|\psi_2\rangle + 2|\psi_3\rangle$

احسب: $A|\psi\rangle$ ؟

التمرين 2:

احسب القيم الذاتيةو الاشعة الذاتية للمصفوفات التالية :

$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ماهي المصفوفات التي تحقق الخاصية الارميتية ؟

التمرين 3:

لدينا: $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ في الأساس المتعامد $\{ |e_1>, |e_2> \}$

- احسب القيم الذاتية والأشعة الذاتية ل A ؟
- احسب احتمال كل قيمة ذاتية ؟ إذا علمت أن شعاع الحالة للنظام هو : $|\psi> = i|e_1>$
- احسب القيمة المتوسطة $< A >$ ؟
- احسب ΔA ؟

التمرين 4 :

نعرف الأشعة $|M>$ و $|\upsilon>$ بالإحداثيات $(i\ ,\ 1)$ و $(1+i, 1-i)$ الترتيب

و المؤثر الخطي A $A = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i; & 0 \end{pmatrix}$ في الأساس المتعامد $\{ |e_1>, |e_2> \}$

تعرف $|\psi> = \eta |M>$ و $|\phi> = K |\upsilon>$

1- احسب $\eta \in R^+$ و $k \in R^+$ ؟ اذا علمت ان $<\psi/\psi> = 1$

$<\phi/\phi> = 1$

2-احسب القيم والاشعة الذاتية ل A في الاساس $\{ |e_1>, |e_2> \}$ ؟

3- يعطي شعاع الحالة للنظام ب: $|\psi(t)> = |e_1>$

ا)- ماهو احتمال كل قيمة ذاتية المحسوبة ؟

ب)- احسب القيمة المتوسطة : $< A >$ ؟

ج)- اوجد ΔA ؟

السلسلة 05

التمرين 01

① . إعطاء التمثيل لـ A

$$\begin{cases} A|\mu_1\rangle = (1+i)|\mu_1\rangle + 2|\mu_2\rangle - |\mu_3\rangle \\ |\mu_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \ |\mu_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \ |\mu_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

نفرض أن :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$A|\mu_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix} \quad \text{—— ①}$$

$$(1+i)|\mu_1\rangle + 2|\mu_2\rangle - |\mu_3\rangle = (1+i)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1+i\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{—— ②}$$

من ① و ② نجد :

$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+i\\2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1+i \\ b_1 = 2 \\ c_1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A|\mu_2\rangle = |\mu_1\rangle + 2|\mu_2\rangle \\ |\mu_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \ |\mu_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \ |\mu_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$A|\mu_2\rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad —— (1)$$

$$|\mu_1\rangle + 2|\mu_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad —— (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ b_2 = 2 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

$$A|\mu_3\rangle = 2|\mu_2\rangle - 3|\mu_3\rangle.$$

بنفس الطريقة

نجد :

$$\begin{cases} a_3 = 2 \\ b_3 = 0 \\ c_3 = -3 \end{cases}$$

ومنه :

$$A \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

② حساب $A|\psi\rangle$

حيث

$$|\psi\rangle = |\mu_1\rangle + i|\mu_2\rangle + 2|\mu_3\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

$$= \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i+i+4 \\ 2+2i \\ -1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2i \\ 2+2i \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow |\psi\rangle = (5+2i)|\mu_1\rangle + (2+2i)|\mu_2\rangle - 7|\mu_3\rangle.$$

التمرين 02 :

① حساب القيم الذاتية و الأشعة الذاتية .

① $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

القيم الذاتية

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix}=0=\lambda^2-\frac{\hbar^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2=\hbar^2/4 \\ \Rightarrow \lambda=\pm\frac{\hbar}{2}. \end{cases}$$

$\boxed{\lambda_1=+\hbar/2}$

الأشعة الذاتية

$$A|v_1\rangle=\lambda_1|v_1\rangle.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \hbar/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\hbar}{2}\beta_1=\frac{\hbar}{2}\alpha_1 \\ \hbar/2\,\alpha_1=\hbar/2\,\beta_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_1=\beta_1}.$$

شرط التقنيع :

$$\langle v_1|v_1\rangle=1.$$

$$(\alpha_1^*,\beta_1^*)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}=1.$$

$$\alpha_1^*\alpha_1+\beta_1^*\beta_1=1 \Rightarrow \begin{cases} |\alpha_1|^2+|\beta_1|^2=1 \\ |\alpha_1|=|\beta_1| \end{cases} \Rightarrow 2|\alpha_1|^2=1$$

$$\Rightarrow \alpha_1^2=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

و منه $\beta_1=\pm 1/\sqrt{2}$.

$$v_1=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Longleftarrow$$

$\boxed{\lambda_2 = -\frac{\hbar}{2}}$

$$A|V_2\rangle = \lambda_2 |V_2\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \hbar/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\hbar}{2}\beta_2 = -\frac{\hbar}{2}\alpha_2 \\ \frac{\hbar}{2}\alpha_2 = -\frac{\hbar}{2}\beta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta_2 = -\alpha_2$$

$$\langle V_2 | V_2 \rangle = 1.$$

$$(\alpha_2^*, \beta_2^*) \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \alpha_2^* \alpha_2 + \beta_2^* \beta_2 = 1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 = 1. \\ 2|\alpha_2|^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \beta_2 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

و منه :

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

بنفس المصفوفات .

② - المصفوفات التي تحقق الخاصية الأرميتية .

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{+} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{*t} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⇐ أرميتية

التمرين 03

① - حساب القيم الذاتية والأشعة الذاتية لـ A .

$$A\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 = 1}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$A|v_1\rangle = \lambda_1 |v_1\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i\beta_1 = \alpha_1 \\ -i\alpha_1 = \beta_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha_1 = i\beta_1}$$

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\beta_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}.$$

$$\langle v_1 | v_1 \rangle = 1.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^* , \beta_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 1 = \alpha_1^* \alpha_1 + \beta_1^* \beta_1 = 1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1 \\ \alpha_1 = i\beta_1 . \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

بنفس الطريقة لـ $\boxed{\lambda_2 = -1}$

② حساب احتمال كل قيمة ذاتية.

$$|\psi\rangle = i|e_1\rangle.$$

$$P(\lambda_1) = P(1) = \sum_{i=1}^{g_n = 1} \frac{|c_1^1|^2}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

$$c_1^1 = \langle v_1 | \psi \rangle$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \left((i|e_1\rangle)^* , (i|e_1\rangle) \right)$$

$$= \left(\langle e_1 | \bar{i} . i | e_1 \rangle \right) = 1$$

$C_1^1 = \langle v_1 | \psi \rangle$.

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(i|e_1\rangle + |e_2\rangle \right) \right)^{\dagger} \left(i | e_1\rangle \right)$.

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle e_1 | -i + \langle e_2 | \right) \left(i | e_1 \rangle \right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle e_1 | e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \right.$

$\Rightarrow P(1) = \frac{(1/\sqrt{2})^2}{1} = \frac{1}{2}$.

$P(1) + P(-1) = 1$.

$\Rightarrow P(-1) = \frac{1}{2}$.

حساب القيمة المتوسطة $\langle A \rangle$

$\langle A \rangle = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\underbrace{\cancel{\langle \psi | \psi \rangle}}_{=1}} = \langle \psi | A | \psi \rangle$.

$A|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\langle \psi | A | \psi \rangle = (i \,.\, 0)^{\dagger} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-i \,.\, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= 0$.

حساب السقيمة ΔA

$\Delta A^2 = \langle A^2 \rangle - \cancel{\langle A \rangle^2}^{\,0}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\langle A^2\rangle = \langle\psi|A^2|\psi\rangle$$

$$A^2|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle\psi|A^2|\psi\rangle = (i, 0)^* \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-i, 0)\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow \langle A^2\rangle = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta A = 1}$$

التمرين 04

حساب η.

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

$$|\psi\rangle = \eta|\mu\rangle = \eta\left(|e_1\rangle + i|e_2\rangle\right).$$

$$\langle\psi| = \langle\mu|\eta^* = \left(\langle e_1| + \langle e_2|-i\right)\eta^*$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left(\langle e_1| - \langle e_2|i\right)\eta^*\cdot\eta\left(|e_1\rangle + i|e_2\rangle\right)$$

$$= |\eta|^2\left[\langle e_1|e_1\rangle - i^2\langle e_2|e_2\rangle\right]$$

$$= |\eta|^2(1+1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} |\eta|^2 = \frac{1}{2} \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$$\eta \in \mathbb{R}^+$$

حساب K

بنفس الطريقة نجد:

$\langle \phi | \phi \rangle = 1$

$|\phi\rangle = K|0\rangle$

$|0\rangle = (1+i)|e_1\rangle + (1-i)|e_2\rangle.$

نجد:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}}$$

② حساب القيم والأشعة الذاتية لـ A.

بنفس الحل

$$\begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1. \end{cases}$$

$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}$, $|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$.

③. من أجل الحالة: $|\psi\rangle = |e_1\rangle$

* احتمال كل قيمة ذاتية:

$P(4) = \frac{4}{5}$, $P(-1) = \frac{1}{5}$.

* حساب القيمة المتوسطة $\langle A \rangle$

$\langle A \rangle = 3$

* إيجاد ΔA:

$\Delta A = 2$