Transformations géométriques

1. Les transformations de 2D

1.1 La translation :

- La translation d'un point P(x,y) en un point P'(x',y') de vecteur t(t_x, t_y), est donnée de la manière suivantes:
  - x'=x+t_x.   y'=y+t_y.
- En notation matricielle les deux expressions précédentes sont notées :
  - [x' y']=[x y]+[t_x t_y].   Ou P'=P+T.
- En formulation homogène

$$\begin{pmatrix} x \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Le facteur d'échelle:

- Consiste à transformer un point P(x,y) en un point P'(x',y'), suivant un vecteur d'échelle S(s_x, s_y)
  - $x' = s_x * x$. $y' = s_y * y$.
- En notation matricielle
  - $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix}$$ Ou : P'=P*S.
- En formulation homogène

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3 La rotation:

- Permet d'obtenir le vecteur P' résultat de la rotation du vecteur P d'un angle θ autour de l'origine avec la relation suivante :
  - $x' = x \cos\theta - y \sin\theta$; $y' = x \sin\theta + y \cos\theta$
- En notation matricielle:
- $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ Ou: P'=P.R;
- En formulation homogène:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Les transformations de 3D

Le repère de base (au niveau des matrices, ce repère correspond à une matrice d'identité d'ordre 4 **:)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objet de base "point" est représenté par un vecteur de n coordonnées (n est la dimension de l'espace de travail):

- ✓ **Translation**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & 0 & Ty \\ 0 & 0 & 1 & Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Changement d'échelle**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Rotation**

- Rotation sur l'axe z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation sur l'axe x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation sur l'axe y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$