كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

الرياضيات -2- — السلسلة رقم-02-

التطبيقـــــات الخطيــــــــة

التمرين 2:

1- اثبـــــات أنه يوجــــد تطـــبيق خطـــي وحـــيد $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ يحقق:

$$f(0,1)=(1,4) \quad \text{و} \quad f(1,2)=(2,3)$$

قـــــاعدة: *إذا كان $f: E \to F$ و B هو أساس لـ E*

و صورة الأساس B بواسطة f هو الأساس B' و B' هو أساس لـ F

فإن : يوجد تطبيق خطي وحيد حيث: $f: E \to F$.

لدينا $E=\mathbb{R}^2$ و $F=\mathbb{R}^2$

و $B=\{(0,1),(1,2)\}$ و $B'=\{(1,4),(2,3)\}$

- الشعاعان $(0,1)$ و $(1,2)$ مستقلان خطيا لان:

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}: \alpha \boldsymbol{U_1} + \beta U_2 = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \Longrightarrow \alpha=\beta=0$$

التبرير:

$$\alpha(0,1)+\beta(1,2)=(0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha+2\beta=0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha=\beta=0$$

و $card(B)=dim(\mathbb{R}^2)=2$: عدد الأشعة المستقلة خطيا

إذن الشعاعان $(0,1),(1,2)$ يشكلان أساس لـــ $E=\mathbb{R}^2$ (فضاء الإنطلاق).

- الشعاعان $(2,3)$ و $(1,4)$ مستقلان خطيا لان:

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}: \alpha \boldsymbol{U_1} + \beta U_2 = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \Longrightarrow \alpha=\beta=0$$

التبرير:

$$\alpha(1,4)+\beta(2,3)=(0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=0 \\ 4\alpha+3\beta=0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha=\beta=0$$

و من جهة أخرى $card(B')=dim(\mathbb{R}^2)=2$: عدد الأشعة المستقلة خطيا

إذن الشعاعان $(1,4),(2,3)$ يشكلان أساس لـــ $F=\mathbb{R}^2$ (فضاء الوصول).

و بالتالي 'B أساس لـ F. و منه حسب القاعدة السابقة يوجد تطبيق خطي وحيد f .

2- إيـــــجاد صيغـــة f أي إيـــجاد $f(x,y)$:

بما ان f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ فهو يكتب من الشكل:

$$f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \qquad \alpha' x + \beta' y)$$

يتم البحث عن : $\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta'$

$$f(1,2) = (\alpha + 2\beta, \qquad \alpha' + 2\beta') = (2,3)$$
$$f(0,1) = (\beta, \qquad \beta') = (1,4)$$

و منه

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 2 \ldots\ldots\ldots 1 \\ \alpha' + 2\beta' = 3 \ldots\ldots 2 \\ \beta = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3 \\ \beta' = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha' = -5 \\ \beta = 1 \\ \beta' = 4 \end{cases}$$

إذن

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to f(x,y) = (y, -5x + 4y)$$

3- حـــــــساب $f(5,6)$, $f^{-1}(2,7)$

$$f(5,6) = (6, -5 \times 5 + 4 \times 6)$$

$$f(5,6) = (6,-1)$$

حســـــاب $f^{-1}(-2,7)$ يعني إيـــجاد (x,y) التي تحقق $f(x,y) = (-2,7)$

$$f(x,y) = (-2,7) \Rightarrow (y, -5x + 4y) = (-2,7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ -5x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

إذن : $f^{-1}(-2,7) = (-3,-2)$

التمرين 5:

لدينا
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \to f(x,y,z) = (x + 2y - z, \ \ y + z, x + y - 2z)$$

قاعدة:

ليكن $F \to f: E$ تطبيق خطي

نواة f

- $kerf = \{U \in E: \ f(U) = 0_F\}$,
- $Imf = \{V \in F;\ \exists U \in E:\ V = f(U)\}$

صور f

-1 إيـــجاد قاعدة (أساس) صورة f أي إيـــجاد $\mathbf{Im}f$

$$\boldsymbol{Imf} = \{\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{F}\,;\ \exists \boldsymbol{U} \in \boldsymbol{E} :\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})\}$$

$$= \{(\boldsymbol{x'},\boldsymbol{y'},\boldsymbol{z'}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}, \exists(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} :\ (\boldsymbol{x'},\boldsymbol{y'},\boldsymbol{z'}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\}$$

$$= \{\exists(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} : (\boldsymbol{x'},\boldsymbol{y'},\boldsymbol{z'}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\}$$

$$= \{\exists(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} : (\boldsymbol{x'},\boldsymbol{y'},\boldsymbol{z'}) = (\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z},\ \ \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\mathbf{2}\boldsymbol{z})\}$$

$$= \left\{\exists(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

الأشعة تولد $\boldsymbol{Imf}$

ندرس الاستقلال الخطي لأشعة الثلاثة $\boldsymbol{U_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}: \alpha\,\boldsymbol{U_1} + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \overset{???}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha\,\boldsymbol{U_1} + \beta U_2 + \gamma U_3 = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta - \gamma = 0 \dots\dots 1 \\ \beta + \gamma = 0 \dots\dots\dots\dots.2 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \dots\dots 3 \end{cases}$$

من المعادلة 2 نجد $\beta = -\gamma$ نعوض قيمة β في المعتدلتين نجد:

$$\begin{cases} \alpha - 3\gamma = 0 \\ \alpha - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

الأشعة مرتبطة خطيا إذن نأخذ شعاعين و ندرس الاستقلال الخطي لهما، مثلا نأخذ

$$\alpha\,\boldsymbol{U_1} + \beta U_2 = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \dots\dots 1 \\ 0 + \beta = 0 \dots\dots.2 \\ \alpha + \beta = 0 \dots\dots 3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن الشعاعين $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ مستقلان خطيا و بما أنها مولدة لــ Imf ***الجملة*** $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ و منه الجملة تشكل أساس لـــ Imf

- إذن يمكن أن نستنتج أن $dim(Imf) = 2$.

2- إيـــــجاد أساس (قاعدة) النواة $kerf$

$$kerf = \{U \in E:\ f(U) = 0_F\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ \begin{pmatrix}x+2y-z\\y+z\\x+y-2z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}x+2y-z = 0 \ldots 1\\ y+z = 0 \ldots\ldots\ldots .2\\ x+y-2z = 0..3\end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix}y = -z\\ x = 3z\end{matrix}$$

إذن

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /x = 3z, y = -z \Longrightarrow (x,y,z) = (3z,-z,z)$$

و منه

$$kerf = \{z(3,-1,1); z \in \mathbb{R}\}$$

أي

$$kerf = \{(3,-1,1)\}$$

المجموعة ذات شعاع وحيد غير معدوم إذن هي مستقلة خطيا و بما أنها مولدة (الجملة $\langle(3,-1,1)\rangle$ تولد $kerf$)

إذن الجملة تشكل أساس لـــ $kerf$

- **يمكن أن نستنتج أن $dim(kerf) = 1$**
- **لتحقق من العمل لدينا قاعدة: $dim(E) = dim(kerf) + dim(Imf)$**

إذن $\quad dim(\mathbb{R}^3) = dim(kerf) + dim(Imf)$

$$3 = 1 + 2$$

التمرين 8 :

- ***إيـــــجاد*** $(f+g)(V)$ ، $(3f)(V)$ و $(2f-5g)(V)$

لدينا.

$$f:\quad \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \to f(x,y,z) = (2x, y+z)$$

و

$$g:\quad \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \to g(x,y,z) = (x-z, y)$$

- $(f+g)(V) = f(V) + g(V),$ $\quad$ **V=(2,3,4)**

$$
\begin{aligned}
&= f(2,3,4) + g(2,3,4)\\
&= (2\times 2, 3+4) + (2-4, 3)\\
&= (4,7) + (-2,3)\\
&= (4-2, 7+3)\\
&= (2,11)
\end{aligned}
$$

- $(3f)(V) = 3\times f(2,3,4) = 3(2\times 2, 3+4) = 3(4,7) = (12,21)$

- $(2f-5g)(V) = 2f(W) - 5g(W),$ W=(5,1,3)

$$
\begin{aligned}
&= 2f(5,1,3) - 5g(5,1,3)\\
&= 2(2\times 5, 1+3) - 5(5-3, 1)\\
&= 2(10,4) - 5(2,1)\\
&= (20,8) - (10,5)\\
&= (20-10, 8-5)\\
&= (10,3)
\end{aligned}
$$

التمرين 9:

لدينا:

$$
\begin{aligned}
f:\quad & \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \mathbb{R}^4\\
& (x,y,z) \to f(x,y,z) = (x+z, x-y, z+y, x+y+2z)
\end{aligned}
$$

1- تعـــين نواة f أي تعيـــن $kerf$

$$
\begin{aligned}
kerf &= \{U \in E:\ f(U) = 0_F\}\\
&= \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ f(x,y,z) = (0,0,0,0)\}\\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x+z \\ x-y \\ z+y \\ x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ x-y=0 \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \\ y+z=0 \ldots\ldots\ldots\ldots 3 \\ x+y+2z=0 \ldots\ldots 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases}
$$

إذن

$$
\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=-z, y=-z \Rightarrow (-z,-z,z) = z(-1,-1,1)
$$

و منه $kerf = \{z(-1,-1,1), z \in \mathbb{R}\}$

$$
kerf = \{(-1,-1,1)\}
$$

المجموعة ذات شعاع وحيد غير معدوم إذن هي مستقلة خطيا و بما أنها مولدة لـ $kerf$ (الجملة $\langle(-1,-1,1)\rangle$ تولد $kerf$).

إذن الجملة تشكل أساس لـــ $\boldsymbol{kerf}$

- يمكن أن نستنتج أن: $\boldsymbol{dim(kerf) = 1}$

قاعدة:

إذ كان $F \quad \rightarrow \quad f: E$ و $\boldsymbol{kerf = 0_E}$ فإن $\boldsymbol{f}$ متبـــــاين

بما ان $\boldsymbol{kerf \neq \{(0,0,0)\}}$ فإن $\boldsymbol{f}$ ليس متباين.

2- إيــــجاد قاعدة (أساس) صورة $\boldsymbol{f}$ ***أي إيــــجاد*** $\mathbf{Im}\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{Imf = \{V \in F\,;\, \exists U \in E : V = f(U)\}}$$

$$= \{(\boldsymbol{x', y', z', t'}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{4}}, \exists(\boldsymbol{x, y, z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} : (\boldsymbol{x', y', z', t'}) = \boldsymbol{f(x, y, z)}\}$$

$$= \left\{\exists(\boldsymbol{x, y, z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} : \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{z'} \\ \boldsymbol{t'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x+z} \\ \boldsymbol{x-y} \\ \boldsymbol{z+y} \\ \boldsymbol{x+y+2z)} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\exists(\boldsymbol{x, y, z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

الأشعة تولد $\boldsymbol{Imf}$

ندرس الاستقلال الخطي لأشعة الثلاثة $\boldsymbol{U_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}: \alpha\, \boldsymbol{U_1} + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \overset{???}{\Rightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha\, \boldsymbol{U_1} + \beta U_2 + \gamma U_3 = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots.1 \\ \alpha - \beta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots.2 \\ \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots.3 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \ldots\ldots.4 \end{cases}$$

من المعادلة 2 نجد $\alpha = -\gamma$ و من المعادلة 2 نجد $\alpha = \beta$ نعوض القيمتين في المعادلة 3

نجد: $-\gamma + \gamma = 0$ **الأشعة مرتبطة خطيا إذن ندرس الاستقلال الخطي لشعاعين، مثلا نأخذ**

$$\alpha\, \boldsymbol{U_1} + \beta U_2 = (0,0,0,0) \Longrightarrow \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن الشعاعين $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ مستقلان خطيا و بما أنها مولدة لـــ $\boldsymbol{Imf}$ ***الجملة***

$\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ تشكل أساس لـــ $\boldsymbol{Imf}$

- **إذن يمكن أن نستنتج أن:** $\boldsymbol{dim(Imf) = 2}$.

قاعدة:

إذ كان $F \quad \to \quad f\colon E$ و $\boldsymbol{dim(F) = dim(Imf)}$ فإن $\boldsymbol{f}$ غـــــــامر

$\boldsymbol{f}$ ***ليس غامر لان :*** $\boldsymbol{dim(\mathbb{R}^4) = 4 \neq dim(Imf) = 2}$

التمرين 10:

لدينا:

$$\boldsymbol{f}:\quad \mathbb{R}^2 \quad \to \quad \mathbb{R}^3$$
$$\boldsymbol{(x,y) \to f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)}$$

3- تعـــين نواة $\boldsymbol{f}$ أي تعيـــن $\boldsymbol{kerf}$

$$\boldsymbol{kerf = \{U \in E:\ \ f(U) = 0_F\}}$$
$$\boldsymbol{= \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2:\ \ f(x,y) = (0,0,0)\}}$$
$$\boldsymbol{= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix}x+z\\x-y\\x+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ x-y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \\ x+y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 3 \end{cases} \Longrightarrow \quad x = y = 0}$$

إذن

$$\boldsymbol{kerf = \{(0,0)\}}$$

- **يمكن أن نستنتج أن :** $\boldsymbol{dim(kerf) = 1}$

بما ان $\boldsymbol{kerf = \{(0,0)\}}$ **فإن** $\boldsymbol{f}$ **متباين.**

4- تعيين صورة f أي تعيين $\mathrm{Im}f$

$$\boldsymbol{Imf} = \{\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{F}\,;\ \exists \boldsymbol{U} \in \boldsymbol{E} : \boldsymbol{V} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})\}$$
$$= \{(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}') \in \mathbb{R}^3, \exists (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 : (\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}') = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}$$
$$= \left\{\exists (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \left\{\exists (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{z}' \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

الشعاعان يولدان $\boldsymbol{Imf}$

ندرس الاستقلال الخطي لشعاعين $\boldsymbol{U_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha\, \boldsymbol{U_1} + \beta U_2 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \overset{???}{\Rightarrow} \alpha = \beta = 0$$

$$\alpha\, \boldsymbol{U_1} + \beta U_2 = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \ldots..1 \\ \alpha - \beta = 0 \ldots..2 \\ \alpha + \beta = 0 \ldots..3 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن الشعاعين $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ مستقلان خطيا و بما أنها مولدة لــ $\boldsymbol{Imf}$ ***الجملة*** $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ تشكل أساس لــ $\boldsymbol{Imf}$

- إذن يمكن أن نستنتج أن: $\boldsymbol{dim(Imf) = 2}$.

$\boldsymbol{f}$ ليس غامر لان : $\boldsymbol{dim}(\mathbb{R}^3) = \boldsymbol{3} \neq \boldsymbol{dim(Imf) = 2}$

التمرين 11:

لدينا $\boldsymbol{f}$ تطبيـــق خطـــي معرف من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^3$

لدينا $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^3$ و $\boldsymbol{F} = \mathbb{R}^3$

$\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{e_1} = (\boldsymbol{1},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}), \boldsymbol{e_2} = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{1},\boldsymbol{0}), \boldsymbol{e_3} = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{1})\}$ أساس قانوني لـ $\mathbb{R}^3$

و $\boldsymbol{f(e_1) = -2e_1 + 2e_3}, \quad \boldsymbol{f(e_2) = 3e_2}, \quad \boldsymbol{f(e_3) = -4e_1 + 4e_3}$

1- تعيين *f(x,y,z)*

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$$
$$\Rightarrow f(x,y,z)=f(xe_1+ye_2+ze_3)$$
$$=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$$
$$=x(-2e_1+2e_3)+y(3e_2)+zf(-4e_1+4e_3)$$

$$=x(-2(1,0,0)+2(0,0,1))+y\big(3(0,1,0)\big)+z(-4(1,0,0)+4(0,0,1))$$

$$=x\big((-2,0,0)+(0,0,2)\big)+y\big((0,3,0)\big)+z\big((-4,0,0)+(0,0,4)\big)$$

$$=x\big((-2,0,2)\big)+y\big((0,3,0)\big)+z\big((-4,0,4)\big)$$

$$=\big((-2x,0,2x)\big)+\big((0,3y,0)\big)+\big((-4z,0,4z)\big)$$

$$=(-2x-4z,\quad 3y,\quad 2x+4z)$$

إذن:

$$f:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z)\to f(x,y,z)=(-2x-4z,\ 3y\ ,\ 2x+4z)$$

1- تعيين أساس نواة f

- $$kerf=\{U\in E:\ f(U)=0_F\}$$

$$=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ f(x,y,z)=(0,0,0)\}$$
$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\begin{pmatrix}-2x-4z\\3y\\2x+4z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2x-4z=0\ \ldots\ldots 1\\ 3y=0\ \ldots\ldots\ldots 2\\ 2x+4z=0\ \ldots\ldots 3\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{matrix}y=0\\ x=-2z\end{matrix}$$

إذن

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=-2z,y=0\Rightarrow(x,y,z)=(-2z,0,z)$$
$$\Rightarrow(x,y,z)=z(-2,0,1),\qquad z\in\mathbb{R}^3$$

و منه $kerf=\{z(-2,0,1),z\in\mathbb{R}\}$

$$kerf=\{(-2,0,1)\}$$

المجموعة ذات شعاع وحيد غير معدوم إذن هي مستقلة خطيا و بما أنها مولدة لـ $kerf$ (الجملة $\langle(-2,0,1)\rangle$ تولد $kerf$)

إذن الجملة تشكل أساس لـــ $kerf$. $kerf\neq(0,0,0)$ و منه f ليس متبـــاين

- يمكن أن نستنتج أن: $dim(kerf)=1$.

- **قاعدة:**

$$dim(E)=\ dim(kerf)+dim(Imf)$$

$$\boldsymbol{dim}(\mathbb{R}^3) = \mathbf{3}, \quad \boldsymbol{dim}(\boldsymbol{kerf}) = \mathbf{1} \;\Longrightarrow\; \boldsymbol{dim}(\boldsymbol{Imf}) = \mathbf{2}$$

و لكي يكون $\boldsymbol{f}$ غـــامر يجب ان يكون :

$$\boldsymbol{dim}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{dim}(\boldsymbol{Imf})$$

لدينا

$$\boldsymbol{dim}(\mathbb{R}^3) = \mathbf{3} \neq \boldsymbol{dim}(\boldsymbol{Imf}) = \mathbf{2}$$

إذن $\boldsymbol{f}$ ليس غـــامر

5- تعييـــــن أساس لصـــورة f

$$\boldsymbol{Imf} = \{\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{F}\,;\, \exists \boldsymbol{U} \in \boldsymbol{E} : \boldsymbol{V} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})\}$$

$$= \{(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}, \boldsymbol{z'}) \in \mathbb{R}^3, \exists (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 : (\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}, \boldsymbol{z'}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\}$$

$$= \left\{\exists (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}\boldsymbol{z} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{y} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}\boldsymbol{z} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\exists (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{z'} \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

إذن $\boldsymbol{U_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $U_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ تولد $\boldsymbol{Imf}$

و بما أن $\boldsymbol{dim}(\boldsymbol{Imf}) = \mathbf{2}$ إذن الأشعة $\boldsymbol{U_1}$، U_2 و U_3 مرتبطة خطيا

أي عدد الأشعة المشكلة للأساس هي 2.

نلاحظ أن : $U_3 = 2U_1$ أي U_1 و U_3 مرتبطة خطيا و بالتالي نأخذ U_1 و U_2 كأساس لـ $\boldsymbol{Imf}$

و منه أساس $\boldsymbol{Imf}$ هو $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

- رتبة $\boldsymbol{f}$ = $\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{f})$

  $\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{f})$: هو عدد أشعة أساس $\boldsymbol{Imf}$

إذن : $\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{dim}(\boldsymbol{Imf}) = \mathbf{2}$

بالتوفيـــــــــــــــق