التمرين 1 : الجزء 3

نبرهن ما يلي :

اذا كانت f دالة متزايدة فإن f قابلة للتكامل

بمفهوم ريمان على $[a,b]$

المعطيات : f متزايدة

المطلوب : f قابلة للتكامل بمفهوم ريمان

لكي نحقق هذا المطلوب، نستعمل ما يلي :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists^{??} p = (x_i)_{i=\overline{1,n}} : S_f(p) - s_f(p) < \varepsilon$$

مجموع داربو العلوي

مجموع داربو السفلي

معناه : من اجل كل ع موجب ، هل توجد تقسيمة لـ $[a,b]$

$p = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$ بحيث الفرق بين مجموع داربو

العلوي و السفلي صغير جدا أي

$S_f(p) - s_f(p) < \varepsilon$

اذن : نبحث عن شكل التقسيمة $p = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$ التي تحقق

$$S_f(p) - s_f(p) < \varepsilon$$

نبدأ بحساب عبارة $S_f(p)$ ثم $s_f(p)$ واخيرا

الفرق بينهما :

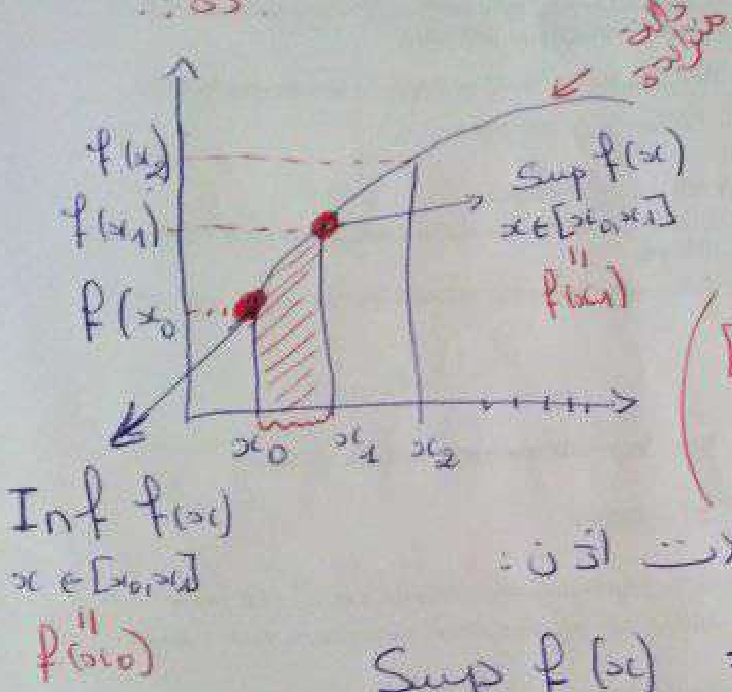
$$?? = S_f(p)$$

لدينا

$$S_f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

ماذا تساوي هذه العبارة ؟؟



لدينا f متزايدة معناه على المجال:

$$\sup f(x) = f(x_1) \quad : [x_0, x_1]$$

أكبر قيمة لـ f على المجال $[x_0, x_1]$ هو $f(x_1)$

بنفس الطريقة على باقي المجالات اذن:

$$\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_i)$$

ومنه:

$$S_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \ldots\ldots (1)$$

لدينا ؟؟ $s_f(P)$

$$s_f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

انطلاقا من الرسم السابق (f متزايدة) ينتج

على المجال $[x_0, x_1]$: $\operatorname{Inf} f(x) = f(x_0)$

(أصغر قيمة لـ f على المجال $[x_0, x_1]$ هو $f(x_0)$)

بنفس الطريقة على باقي المجالات اذن

$$\operatorname{Inf}_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_{i-1})$$

ومنه:

$$S_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) \text{ --- } (2)$$

في الأخير نحسب $(1) - (2)$ معناه:

$$\overline{S}_f(P) - S_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

استخراج $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$ كعامل مشترك

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \left[f(x_i) - f(x_{i-1}) \right]$$

نلاحظ أنه يمكن كتابة:

$$x_i - x_{i-1} \leq \underbrace{\underset{1\leq i\leq n}{\operatorname{Max}} (x_i - x_{i-1})}, \forall i = \overline{1,n}$$

أكبر قيمة لعبارة الفرق $(x_i - x_{i-1})$ حيث $1 \leq i \leq n$

و بالتالي هذه العبارة ستكون عددية أي مستقلة عن i (معناه لا تكتب بدلالة i).

كلها قيم عددية، نختار أكبر قيمة لها

$$\begin{aligned} \cdot &= x_1 - x_0 \\ \cdot &= x_2 - x_1 \\ \cdot &= x_3 - x_2 \\ &\vdots \\ \cdot &= x_{i+1} - x_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

ومنه:

$$\boxed{S'_f(P) - s_f(P)} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right]$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \max_i (x_i - x_{i-1})\left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right]$$

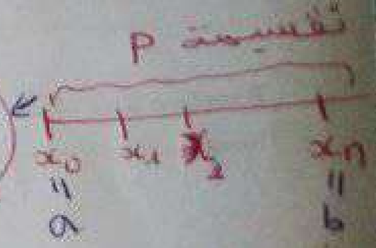
مستقل عن i، اذن نكتبها خارج $\sum_{i=1}^{n}$

$$\le \max_i (x_i - x_{i-1}) \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)$$

$$= \max_i (x_i - x_{i-1})\left[(\cancel{f(x_1)} - f(x_0)) + (f(x_2) - \cancel{f(x_1)}) + \dots + (f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})})\right]$$

$$= \max_i (x_i - x_{i-1})\left(f(x_n) - f(x_0)\right)$$

$$= \boxed{\max_i (x_i - x_{i-1})\left(f(b) - f(a)\right)}$$



نحن نبحث عن شكل التقسيمة التي تحقق المطلوب والتقسيمة نعبر عنها بـ $(x_i - x_{i-1})$ حيث $1 \le i \le n$. اذن، لكي تتحقق

$$S'_f(P) - s_f(P) < \varepsilon$$

يكفي أن يتحقق:

$$\max_i (x_i - x_{i-1})\left(f(b) - f(a)\right) < \varepsilon$$

معناه:

$$\underbrace{\max_i (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}}_{\text{التقسيمة المناسبة تحقق هذا الشرط}}$$

اذن،

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \left(\max_i (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \right) :$$

$$S'_f(P) - S_f(P) < \varepsilon$$

معناه من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، ~~f~~ توجد تقسيمة $P = (x_i)_{1 \le i \le n}$

للمجال $[a,b]$ حيث

$$\max_i (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

والتي تحقق

$$S'_f(P) - S_f(P) < \varepsilon$$

ومنه: f قابلة للتكامل بمفهوم ريمان