Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Processus Stochastique 2019/2020

Solution Serie N^{0}03

Exercice 01.

Soit $\{X(t), \ t \geq 0\}$ un processus a accroissements indépendants a espace de valeurs E discret. Montrer que $\{X(t), \ t \geq 0\}$ est un processus de Markov.

Solution:

On doit montrer que, quels que soient $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$ et $i_1, ..., i_n \in E$ on a

$$P\{X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, ..., X_{t_1} = i_1\} = P\{X_{t_n} = i_n \left| X_{t_{n-1}} = i_{n-1} \right.\}?$$

Nous avons

$$P\{X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, ..., X_{t_1} = i_1\} = \frac{P\{X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, ..., X_{t_1} = i_1\}}{P\{X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, ..., X_{t_1} = i_1\}}$$

alors

$$\begin{aligned} P\{X_{t_n} &= i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, ..., X_{t_1} = i_1\} \\ &= \frac{P\{X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = i_n - i_{n-1}, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = i_{n-1} - i_{n-2}, ..., X_{t_1} - X_{t_0} = i_1 - i_0\}}{P\left\{X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = i_{n-1} - i_{n-2}, ..., X_{t_1} - X_{t_0} = i_1 - i_0\right\}}, \\ &= \frac{P\left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = i_n - i_{n-1}\right) P\left(X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = i_{n-1} - i_{n-2}\right) ....P\left(X_{t_1} - X_{t_0} = i_1 - i_0\right)}{P\left(X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = i_{n-1} - i_{n-2}\right) ...P\left(X_{t_1} - X_{t_0} = i_1 - i_0\right)} \end{aligned}$$

$$= P\left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = i_n - i_{n-1}\right)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} P\{X_{t_n} - X_{t_{n-1}} &= i_n - i_{n-1}\} = \frac{P\left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = i_n - i_{n-1}\right) P\left(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right)}{P\left(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right)} \\ &= \frac{P\left(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right)}{P\left(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right)} \\ &= P\left(X_{t_n} = i_n \left| X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\right.\right). \end{aligned}$$

Exercice 02.

Supposons q'un point fait une promenade aléatoire sur la droite et qu'il ne peut s'arrêter qu'aux points de coordonnés 1,2,3,... m.

En plus on suppose que de l'état i ne peut se déplacer qu'a l'état $i+1$ ou a l'état $i-1$ avec les probabilités

$$p_{ij} = P\left(X\left(k+1\right) = j / X\left(k\right) = i\right)$$

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= P\left(X_{k+1} = i+1 \,|X_k = i\right) = p, \\ p_{i,i-1} &= P\left(X_{k+1} = i-1 \mid X_k = i\right) = q = 1-p. \end{aligned}$$

si $i \neq 1$ et $i \neq m$.

Pour $i = 1$ ou $i = m$ on a les états absorbants

$$\begin{aligned} p_{1,1} &= P\left(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1\right) = 1, \\ p_{m,m} &= P\left(X_{k+1} = m \mid X_k = m\right) = 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas déterminer l'espace des état ansi que la matrice de transition de cette chaîne de Markov.

Solution.

1) L'espace d'états est $E = \{1, 2, ..., m\}$.

2) On dit que l'on a une chaine de Markov a espace d'états finis E, contenant deux états absorbants $\{1\}$ et $\{m\}$ et tous les autres états transitoires. Dans ce cas la matrice de transitions est d'ordre m et est donnée par la formule

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & & . & . & p_{1(m-1)} & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & & . & . & p_{2(m-1)} & p_{2m} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & . & . & p_{3(m-1)} & p_{3m} \\ . & . & . & . & . & . & . & p_{(m-1)m} \\ p_{m1} & p_{m2} & p_{m3} & . & . & & p_{m(m-1)} & p_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 03.

1) Soit $p_{ij}^{(k)}$ la probabilité de transition d'un système de l'état i a l'état j pour k pas. Dans ce cas nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\pi_j^{(k)} &= \sum_{i=1}^{m} P\left(X_k = j \mid X_0 = i\right) P\left(X_0 = i\right), \\ &= \sum_{i=1}^{m} p_{ij}^{(k)} \pi_i = \sum_{i=1}^{m} \pi_i p_{ij}^{(k)}.\end{aligned}$$

Montrer que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(k)} &= \left\| p_{ij}^{(k)} \right\|, \\ &= \mathbf{P}^k\end{aligned}$$

2) La loi de répartition d'un processus de Markov discret homogène $\{X(t),\ t \in \mathbb{N}\}$ est déterminée par le vecteur π des probabilités initiales et par la matrice stochastique $\mathbf{P}$.

Est-ce-que ce processus est déterminée par π et $\mathbf{P}^{(2)}$.

Solution.

1) Pour $k = 1$ cette affirmation est triviale, puisque la matrice $P = P^{(1)}$ elle-même est stochastique. Supposons que l'affirmation est déja prouvée pour le cas $k-1$ $(k \geq 2)$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(k)} &= P\{X_{k+u} = j | X_u = i\}, \\ &= \frac{P\{X_{k+u} = j, X_u = i\}}{P\{X_u = i\}}, \\ &= \frac{\sum\limits_{r=1}^{m} P\{X_{k+u} = j, X_{u+1} = r, X_u = i\}}{P\{X_u = i\}}, \\ &= \frac{1}{P\{X_u = i\}} \sum_{r=1}^{m} P\{X_{k+u} = j \,| X_{u+1} = r, X_u = i\} P\{X_{u+1} = r, X_u = i\}, \\ &= \frac{1}{P\{X_u = i\}} \sum_{r=1}^{m} P\{X_{k+u} = j \,| X_{u+1} = r\} P\{X_{u+1} = r \,| X_u = i\} P\left\{X_u = i\right\}, \\ &= \sum_{r=1}^{m} P\{X_{k+u} = j \,| X_{u+1} = r\} P\{X_{u+1} = r \,| X_u = i\},\end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^{m} p_{rj}^{(k-1)} p_{ir} = \sum_{r=1}^{m} p_{ir} p_{rj}^{(k-1)},$$

alors

$$P^{(k)} = \left\| p_{ij}^{(k)} \right\| = P^{(k-1)} P = P P^{(k-1)} = P^2 P^{(k-2)} = ... = P^k.$$

2) Supposons que l'espace d'états $E = \{1, 2\}$. Dans ce cas

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ si } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

P^2 est la même pour deux P differentes. Mais si $\pi = (1/3, 2/3)^T$,

$$\pi^{(3)} = \pi^T P^{(2)} P = (1/3, 2/3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1/3, 2/3), \text{ si } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\pi^{(3)} = \pi^T P^{(2)} P = (1/3, 2/3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (2/3, 1/3), \text{ si } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La probabilité a être dans l'état 1 après trois pas est égale a 1/3 pour le premier cas et a 2/3 pour le deuxième. On a obtenu deux chaines de Markov différentes, ayant les mêmes P^2.

Exercice 04.

Soit $\{X(t),\ t \in \mathbb{N}\}$ une chaîne homogène de Markov a 2 états, dont la matrice stochastique est

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{array}{cc} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1-a & a \\ b & 1-b \end{array} \right\|.$$

$0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$.

1) Montrer que si $0 \leq a+b < 2$, alors

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{a+b} \left\{ \left\| \begin{array}{cc} b & a \\ b & a \end{array} \right\| + (1-a-b)^n \left\| \begin{array}{cc} a & -a \\ -b & b \end{array} \right\| \right\}.$$

2) Trouver

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n.$$

3) Supposons que le vecteur des probabilités initiales

$$\pi = (\pi_1, \pi_2)^T = (0.7,\ 0.3)^T,$$

et que la matrice stochastique

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{array}{cc} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{array} \right\|$$

Trouver $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$.

Solution.

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{array}{cc} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1-a & a \\ b & 1-b \end{array} \right\|.$$

On peut, par exemple démontrer cette formule par récurrence. Soit $n = 1$. Dans ce cas on a

$$\frac{1}{a+b} \left\{ \left\| \begin{array}{cc} b & a \\ b & a \end{array} \right\| + (1-a-b) \left\| \begin{array}{cc} a & -a \\ -b & b \end{array} \right\| \right\} = \frac{1}{a+b} \left\| \begin{array}{cc} (b+a)(1-a) & a - a(1-a-b) = a(a+b) \\ b - b(1-a-b) = -b(a+b) & a + b(1-a-b) = (1-b)(a+b) \end{array} \right\|.$$

En supposant que la formule soit vrie por n

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{a+b} \left\{ \left\| \begin{array}{cc} b & a \\ b & a \end{array} \right\| + (1-a-b)^n \left\| \begin{array}{cc} a & -a \\ -b & b \end{array} \right\| \right\}$$

on en tire que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{n+1} &= \mathbf{P}^n \mathbf{P}, \\
&= \frac{1}{a+b} \left\{ \left\| \begin{array}{cc} b & a \\ b & a \end{array} \right\| + (1-a-b)^n \left\| \begin{array}{cc} a & -a \\ -b & b \end{array} \right\| \right\} \left\| \begin{array}{cc} 1-a & a \\ b & 1-b \end{array} \right\|, \\
&= \frac{1}{a+b} \left\{ \left\| \begin{array}{cc} b & a \\ b & a \end{array} \right\| + (1-a-b)^{n+1} \left\| \begin{array}{cc} a & -a \\ -b & b \end{array} \right\| \right\}.
\end{aligned}$$

$$\left\| \begin{array}{cc} b & a \\ b & a \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} 1-a & a \\ b & 1-b \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} b & a \\ b & a \end{array} \right\|$$

$$\left\| \begin{array}{cc} a & -a \\ -b & b \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1-a & a \\ b & 1-b \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} a(1-a) - ab & a^2 - a(1-b) \\ -b(1-a) + b^2 & -ab + b(1-b) \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} a - a^2 - ab & a^2 - a + ab \\ -b(1-a) + b^2 & -ab + b(1-b) \end{array} \right\| = (1-a-b)^1 \left\| \begin{array}{cc} a & -a \\ -b & b \end{array} \right\|$$

Et donc la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Si $0 < a+b < 2$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \frac{1}{a+b} \left\{ \left\| \begin{array}{cc} b & a \\ b & a \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cc} a & -a \\ -b & b \end{array} \right\| \lim_{n\to\infty} (1-a-b)^n \right\}.$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-(a+b))^n = 0?$$

cas1: $0 < a+b < 1 \to 0 < 1-(a+b) < 1$
cas2: $1 < a+b < 2 \to -1 < 1-(a+b) < 0$

$$\begin{aligned} \alpha &\in \;]-1,0[\to \alpha = (-1)\,\beta \text{ tq } \beta \in]0,1[\\ \lim_{n\to\infty}\alpha^n &= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\beta^n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \lim_{n\to\infty}\beta^n = 0 \quad \text{tq } \beta \in]0,1[\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}P^n = \frac{1}{a+b}\begin{Vmatrix} b & a \\ b & a \end{Vmatrix}.$$

Si $a+b=0$, dans ce cas $P = I_2$ et $P^n = I_2$.
Si $a+b=2$, dans ce cas

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n &= \frac{1}{a+b}\left\{\begin{Vmatrix} b & a \\ b & a \end{Vmatrix} + \lim_{n\to\infty}(1-a-b)^n \begin{Vmatrix} a & -a \\ -b & b \end{Vmatrix}\right\}. \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{Vmatrix} b & a \\ b & a \end{Vmatrix} + \lim_{n\to\infty}(-1)^n \begin{Vmatrix} a & -a \\ -b & b \end{Vmatrix}\right\} \end{aligned}$$

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},\; P^n = 0.5\left\{\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} + (-1)^n \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}\right\},$$

d'ou on tire que $\lim_{n\to\infty}P_n$ n'existe pas.

Exercice 05.

La durée de vie d'un produit a une fonction de répartition $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$. La durée de réparation a une fonction de répartition $G(t) = 1 - e^{-\beta t}$, $t \geq 0$.

Notons 0 l'état de fonctionnement, 1 l'état de réparation. Au moment $t = 0$ le produit est dans l'état 0. Soit $X(t)$, $t \geq 0$, l'état du produit au moment t.

1) Ecrire les équations directes de Kolmogorov.

2) Trouver les probabilités

$$\mathrm{p}_i = P\left(X(t) = i\right) \text{ pour } i = 0, 1.$$

3) Montrer que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} p_0(t) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \\
\lim_{t\to+\infty} p_1(t) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Solution.

Les intensités de transition sont

$$\begin{aligned}
\lambda_{01} &= \lim_{h\to0} \frac{p_{01}(h)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{1-e^{-\alpha h}}{h} = \alpha, \\
\lambda_{10} &= \lim_{h\to0} \frac{p_{10}(h)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{1-e^{-\beta h}}{h} = \beta.
\end{aligned}$$

La matrice des intensités infinitésimales est

$$\begin{pmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix},$$

Les équations directes de Kolmogorov sont

$$\begin{aligned}
P_{00}'(t) &= P_{00}(t)\lambda_{00} + P_{01}(t)\lambda_{10}, \\
P_{01}'(t) &= P_{00}(t)\lambda_{01} + P01(t)\lambda_{11}.
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
P_{00}'(t) &= -P_{00}(t)\alpha + P_{01}(t)\beta, \\
P_{01}'(t) &= P_{00}(t)\alpha - P_{01}(t)\beta.
\end{aligned}$$

avec les conditions initiales $P_{00}(0) = 1$, $P_{01}(0) = 0$.

L'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -\alpha-\lambda & \beta \\ \alpha & -\beta-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou $\lambda(\lambda+\alpha+\beta) = 0$. Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -(\alpha+\beta)$. Notons $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T$ et $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^T$, les vecteurs propres correspondant a λ_1 et λ_2

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= -(\alpha+\beta) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d'ou $v_2 = \dfrac{\alpha}{\beta} v_1$, $u_2 = u_1$. Donc $V = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}^T$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$. La solution générale du système d'équations est

$$\begin{pmatrix} P_{00}(t) \\ P_{01}(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(\alpha+\beta)t}.$$

D'après les conditions initiales $1 = C_1 + C_2$, $0 = C_1 \frac{\alpha}{\beta} - C_2$. Donc

$$C_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta},\ C_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Et

$$\begin{aligned} P_{00}(t) &= \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t}, \\ P_{01}(t) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t}. \end{aligned}$$

Exercice 06.

Soit $\{X(t), \ t \geq 0\}$ un processus de naissance, c'est un processus de Markov avec l'espace d'états $E = \{0, 1, 2, ...\}$, tel que $X(0) = 0$ et les intensités $\lambda_{kj} = 0$ $(j < k$ ou $j > k+1)$.

1) Ecrire les équations de Kolmogorov.

2) Trouver la relation de recurrence entre $p_n(t) = P(X(t) = n)$ et $p_{n-1}(t)$.

Solution.

1) La matrice des intensités de transition est

$$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & -\lambda_m & \lambda_m & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Les équations de Kolmogorov sont

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t), \ P_0(0) = 1,$$

$$P_m'(t) = \lambda_{m-1} P_{m-1}(t) - \lambda_m P_m(t), P_m(0) = 0, m \geq 1.$$

En intégrant la première équation on a $P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$. En résolvant l'équation linéaire homogène

$$P_m'(t) = -\lambda_m P_m(t)$$

on a $P_m(t) = C(t)e^{-\lambda_m t}$. Par la méthode de variation des constantes on a

$$C(t) = \lambda_{m-1} \int_0^t P_{m-1}(x) e^{\lambda_m x} dx$$

et

$$P_m(t) = e^{-\lambda_m t} \lambda_{m-1} \int_0^t P_{m-1}(x) e^{\lambda_m x} dx.$$

Exercice 07.

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{N}\}$ une chaine homogène de Markov dont la matrice stoshastique et le vecteur de probabilités initiales

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\|, \text{ et } \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $A(t) = \{X(t) = 1\}$, $t \in N$. Trouver $P(A)$, où $A = \bigcap_{t \geq 1} A(t)$.

Solution. Comme $p_{21} = p_{31} = 0$, on a

$$P(A_t) = P\{X_t = 1\} = P\{X_0 = 1, X_1 = 1, ..., X_t = 1\}$$

pour $\forall t \in \mathbb{N}$, d'ou

$$P(A_t) = P\{X_t = 1\} = P\{X_0 = 1\}P\{X_1 = 1|X_0 = 1\} \cdots P\{X_t = 1|X_{t-1} = 1\} = \frac{1}{3^t}.$$

Comme $\{A_t\}$, $t \in \mathbb{N}$ est une suite décroissante d'événements A_t, on en tire que

$$P(A) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{3^t} = 0.$$