Espérence Conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace Probabilisé. La probabilité conditionnelle d'un evenement $B \in \mathcal{F}$ avec $P(B) > 0$ est $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

La Proba conditionnelle $P(A/B)$ représente la probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisé

$$E[X] = \int_\Omega X \, dP(.)$$

$$E[X/B] = \int_\Omega X \, dP(. /B).$$

Si $X = \mathbb{1}_A$.

$$E[\mathbb{1}_A /B] = \int_\Omega \mathbb{1}_A \, dP(. /B) = \int_A dP(. /B) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

l'application $A \longrightarrow P(A/B)$ définit une nouvelle Proba sur $\mathcal{F}$.

On peut alors définir l'espérance conditionnelle par rapport à B par $E[X/B] = \dfrac{1}{P(B)} E[X \mathbb{1}_B]$.

Nous fixons maintenant une sous-tribu $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$

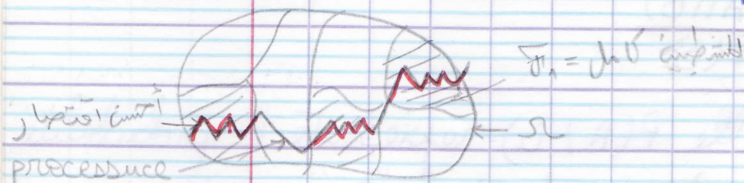
$\mathcal{F}_1$: represente une information partielle sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ obtenue par exemple en observant une v.a X_1.

Définition. Soit X une v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $E|X| < +\infty$. On appelle experance conditionnelle de X sachant $\mathcal{F}_1$ et on note $E[X/\mathcal{F}_1]$.

toute v.a Y satisfaisant les deux conditions

1] $Y \subseteq \mathcal{F}_1$ c-à-d Y est $\mathcal{F}_1$ - mesurable.

2] $\forall A \in \mathcal{F}_1$, on a $\int_A X \, dP = \int_A Y \, dP$ (I)



Si Z est une v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ alors on note $E[X / \sigma(Z)]$ par $E[X/Z]$.

Théorème:

1] L'esperance conditionnelle $E(X/\mathcal{F}_1)$ existe

2] " " est unique dans le sens que si Y et Y' sont deux versions de $E[X/\mathcal{F}_1]$ alors $Y = Y'$ presque sûrement.

3] On a $E[E(X/\mathcal{F}_1)] = E[X]$ et $E[|E(X/\mathcal{F}_1)|] \leq E|X|$

Demonstration:

Commençons par 3]. Soit $Y = E[X/\mathcal{F}_1]$.

Si $A = \Omega$ dans (I).

$\int_\Omega X \, dP = \int_\Omega Y \cdot dP = E[X] = E[Y]$

Si $Y = E[X/\mathcal{F}_1] \longrightarrow E[X] = E[E(X/\mathcal{F}_1)]$

Y $\mathcal{F}_1$ mes
$\forall A \in \mathcal{F}_1 \int_A X \, dP = \int_A Y \, dP \iff Y = E[X/\mathcal{F}_1]$

Soit $A = \{Y > 0\} = \{\omega : Y(\omega) > 0\}$.

Y est $\mathcal{F}_1$ mes $\Longrightarrow A \in \mathcal{F}_1$.

Par (I) : $\int_A Y \, dP = \int_A X \, dP \leq \int_A |X| \, dP$

$\int_{A^c} -Y \, dP = \int_{A^c} -X \, dP \leq \int_{A^c} |X| \, dP$

بجمع المعادلتين نجد : $|Y| = \begin{cases} Y & \text{sur } A \\ -Y & \text{sur } A^c \end{cases}$

$\int_\Omega |Y| \, dP \leq \int_\Omega |X| \, dP$.

$\Longrightarrow E\left[\,|E(X/\mathcal{F}_1)|\,\right] \leq E|X|$.

* Montrons l'unicité :

Si Y et Y' deux version de $E[X/\mathcal{F}_1]$, alors $\forall A \in \mathcal{F}_1$

$\int_A Y \, dP = \int_A Y' \, dP$ لأن $\int_A X dP = \int_A Y dP$ و $\int_A X dP = \int_A Y' dP$ لأن Y و Y' version لهما

Prenons : $A = \{Y - Y' \geq \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$.

$0 = \int_A (Y - Y') \, dP \geq \varepsilon P(A) = \varepsilon P(Y - Y' \geq \varepsilon)$

alors : $P(Y - Y' \geq \varepsilon) = 0$ car $\varepsilon > 0$.

$P(Y - Y' + \varepsilon) = 0$ نبرهن بالعكس : $Y' - Y \geq \varepsilon$

alors $Y = Y'$ P. sûr

* l'existence : Rappelons qu'une mesure ν sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ est dite absolument continue par rapport à la mesure μ si $\mu(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$ $\forall A \in \mathcal{F}_1$

on écrit : $\nu \ll \mu$.

\- Le théorème de Radon - Nikodym affirme qu'il existe alors une fct f $\mathcal{F}_1$ - mes telle que $\int_A f \, d\mu = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{F}_1$. f est appelée densité ou dérivée de

$\mu(\cdot) = \int f \, d\lambda \Rightarrow \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{d(\int f \, d\lambda)}{d\lambda}$

Radon - Nikodym et noté $\frac{d\nu}{d\mu}$

Supposons que $X \geq 0$.

Posons $\mu = P$ et définissons ν par : $\nu(A) = \int_A X \, dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_1$

de sorte que $\nu \ll \mu$.

Nous avons $\frac{d\nu}{d\mu} \in \mathcal{F}_1$ et $\forall A \in \mathcal{F}_1$.

$$\int_A X \, dP = \nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} \, dP.$$

Proposition :

1] Supposons que X soit $\mathcal{F}_1$-mesurable alors,

$$E[X / \mathcal{F}_1] = X$$

2] Si X est indépendante de $\mathcal{F}_1$, alors : $E[X / \mathcal{F}_1] = E[X]$

3] Soit $\Omega_1, \dots$ une partition de Ω telle que $P(\Omega_i) > 0 \quad \forall i \geq 1$

Soit $\mathcal{F}_1 = \sigma(\Omega_1, \Omega_2, \dots)$ la tribu engendrée par les Ω_i alors,

$$E(X / \mathcal{F}_1)(\omega) = \frac{E[X \mathbb{1}_{\Omega_i}]}{P(\Omega_i)} = \frac{1}{P(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} X \, dP \quad \forall \omega \in \Omega_i$$

Propriétés de l'espérance Conditionnelle

Propriétés analogues à l'espérance :

Proposition :

Soient X et Y deux v.a intégrables et $\mathcal{E}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.

a) Si $X \geq 0$ p.p sur $\Rightarrow E(X / \mathcal{E}) \geq 0$ p.p sur

(Propriété)

$\int_B E(\mathbb{1}_A / \mathcal{F}_1) \, dP = P(A / B)$

b) Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $E[\alpha X + \beta Y / \mathcal{E}] = \alpha E(X/\mathcal{E}) + \beta E(Y/\mathcal{E})$

(linéarité)

c) Si $X \geq Y$ P.P sur $E(X/\mathcal{E}) \geq E(Y/\mathcal{E})$ P.P sur

(croissance).

d) Si X_n est une suite de v.a dans L^1 positives avec $X_n \nearrow X$ P.P sur, alors : $E(X_n/\mathcal{E}) \nearrow E(X/\mathcal{E})$ P.P sur

(Beppo-Levy)

e) Si X_n est une suite de v.a dans L^1 positives alors, $E(\liminf_n X_n / \mathcal{E}) \leq \liminf_n E(X_n/\mathcal{E})$ P.P sur

(Fatou)

f) Si X_n est une suite de v.a dans L^1 tq :
$X_n \longrightarrow X$ P.P sur et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \leq Y$, alors : $E(X_n/\mathcal{E}) \underset{\text{P.S et } L^1}{\longrightarrow} E(X/\mathcal{E})$

(convergence dominé)

g) Si $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe positive, alors lorsque $\Psi(X) \in L^1$. $\Psi(E(X/\mathcal{E})) \leq E(\Psi(X)/\mathcal{E})$ P.P.sur

(Jenson)

l'espérance cond est un opérateur contractant sur L^p $\forall p$.

Propriétés spécifiques à l'espérance conditionnelle

Proposition :

Soient X et Y deux v.a intégrables et $\mathcal{E}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.

unif intég : $\limsup_{c \to 0} \int_{\{X > c\}} |X| dP \longrightarrow 0$

a) $E[E(X/\mathcal{E})] = E[X]$.

b) Si X est $\mathcal{E}$-mesurable, $E[X/\mathcal{E}] = X$ P.P sur.

c) Si Y est $\mathcal{E}$-mes bornée, $E[XY/\mathcal{E}] = Y E[X/\mathcal{E}]$ P.P sur

d) Si $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \mathcal{E}$, $E[X/\mathcal{E}] = E(X)$ P.P sur.

e) Si $\mathcal{E}'$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$ tq $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$

alors $E[E(X/\mathcal{E})/\mathcal{E}'] = E[X/\mathcal{E}']$ P.P sur.

f) Si $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ est une famille de sous tribus de $\mathcal{F}$.

la famille $(E(X/\mathcal{E}_i))_{i \in I}$ est uniformement intégrable

Lemme : $X \in L^1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, P(A) < \delta \Longrightarrow E(|X| \mathbb{1}_A) < \varepsilon$.

Proposition :

Si $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \mathcal{E}$ et si Y est $\mathcal{E}$-mesurable, alors.

Pour tout fct borélienne $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tq : $E[|\phi(x,y)|] < \infty$

On a : $E[\phi(X,Y)/\mathcal{E}] = \Psi(Y)$.

où : $\Psi(y) = E[\phi(X,y)]$.

Preuve.

$\Psi(y) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x,y) \, dP_X(x)$.

Soit $G \in \mathcal{E}$ on note $Z = \mathbb{1}_G$ on a : $P_{(X,Y,Z)} = P_X \otimes P_{(Y,Z)}$

$E[\phi(X,Y)\mathbb{1}_G] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y) z \, dP_{(Y,Z)}(y,z) \, dP_X(x)$.

Fubini $= \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(y) z \, dP_{(Y,Z)}(y,z)$.

donc $E[\phi(X,Y)\mathbb{1}_G] = E[\Psi(Y)\mathbb{1}_G]$.

$E(\phi(x,y)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x,y) \, dP_X(x)$

$E(\phi(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y) \, dP_{X,Y}(x,y)$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \text{si } X \perp\!\!\!\perp Y$$
$$= f_X(x)\, f_{Y/X}(y)$$
$$= f_Y(y)\, f_{X/Y}(x)$$

Version regulière de la loi conditionnelle

Déf :

On appelle noyau Markovien de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ une application de $\mathbb{R}^d \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ à valeurs dans $[0,1]$

$(y, A) \longrightarrow N(y, A)$ tq :

1] $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $\quad y \longrightarrow N(y, A)$ est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ - mesurable.

2] $\forall y \in \mathbb{R}^d$ $\quad A \longrightarrow N(y, A)$ est une mesure de proba.

Exemple :

Soit $\Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ - mes

μ une proba sur $\mathbb{R}$, alors si pour chaque $y \in \mathbb{R}^d$

$\int_{\mathbb{R}} \Psi(y, x)\, \mu(dx) = 1$, alors

$$N(y, A) = \int_A \Psi(y, x)\, \mu(dx).$$

N est un noyau Markovien $\quad (A = \mathbb{R})$

Remarque :

Un noyau Markovien est une proba qui depend de façon mesurable d'un paramètre.

Si N est un noyau Markovien.

Si φ une application mesurable positive ou bornée.

On peut définir : $\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, N(y, dx)$.

$$N(y, A) = \int_A N(y, dx).$$

Théorème :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de Proba, Y une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et X une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}$. il existe un noyau Markovien $N(y, dx)$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ à valeurs $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ tq pour tout fct φ borélienne positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ On a :

$$\boxed{E[\varphi(X)/Y] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, N(Y, dx) \quad P.P\text{-sur}}$$

version regulière de l'esp cond

Si on pose : $\phi(y) = \int \varphi(x)\, N(y, dx)$

On a : $E[\varphi(X)/Y] = \phi(Y)$

Le noyau Markovien $N(y, dx)$ est appelé version regulière de l'esperence conditionnelle

mes Prob

Le fait d'écrire : $E[\varphi(X)/Y] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(X)\, N(Y, dx)$ P.Psur est équivalente à : $\forall g, \forall \varphi$ des fcts mesurable positives (ou bornées) resp $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}$.

$$E[\varphi(X) g(Y)] = E\left[g(Y) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, N(Y, dx)\right]$$

Dém :

$$\begin{aligned} E[\varphi(X) g(Y)] &= E[E[\varphi(X) g(Y)/Y]] \\ &= E\left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) g(Y)\, N(Y, dx)\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, N(y, dx)\, P_Y(dy) \end{aligned}$$

Proposition :

Soit Y un v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et X un v.a à valeurs dans $\mathbb{R}$. P_Y la loi de Y

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau $N(y, dx)$ soit une version régulière de la loi conditionnelle de X sachant Y est que.

Pour toute fct mesurable $h(.,.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ positive (ou bornée) on a.

$$E[h(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} h(x,y)\, N(y,dx)\, P_Y(dy).$$

Dans le cas usuels, une version regulière de la loi cond peut être calculée grâce à

Proposition. Supposons que la loi de couple (X, Y) possède une densité $\Psi(x,y) > 0$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$.

$$P_{X,Y}(dx, dy) = \Psi(x,y)\, dx\, dy.$$

Alors une version régulière de la loi cond de X sachant Y est donnée par:

$$\boxed{N(y, A) = \frac{\int_A \Psi(x,y)\, dx}{\int_{\mathbb{R}} \Psi(x,y)\, dx}}$$

Dém.

Il suffit de vérifier que $\forall g, \varphi$ bornées.

$$E[\varphi(X) g(Y)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left[\frac{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \Psi(x,y)\, dx}{\int_{\mathbb{R}} \Psi(x,y)\, dx} \right] dP_Y(y)$$

On a, $E[\varphi(X) g(Y)] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} \varphi(x) g(y)\, dP_{X,Y}(x,y)$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) . \Psi(x,y)\, dx \right] dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left(\left[\frac{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \Psi(x,y)\, dx}{\int_{\mathbb{R}} \Psi(x,y)\, dx} \right] \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \Psi(x,y)\, dx}_{dP_Y(y)} \right) dy$$

$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) N(y, dx)$

Processus aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace Probabilisé.

Déf :

Soit $X = (X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans un ensemble mesuré (E, ξ)
On dit que X est un processus aléatoire.
L'indice n indique la date à laquelle la v.a X_n est observée.

Déf :

Une filtration de $\mathcal{F}$ est une suite croissante $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ de sous σ-algèbre de $\mathcal{F}$.
On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, P)$ est un espace probabilisé filtré. $\forall n \in \mathbb{N}$, la sous σ-algèbre $\mathcal{F}_n$ représente l'information disponible à la date n.

Exemple :

Soit $X = (X_n)_{n \geq 0}$ un processus aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans (E, ξ) la suite $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_i, i \leq n)$, $n \geq 0$.
est une filtration de $\mathcal{F}$ appelée filtration naturelle de $X = (X_n)_n$.

Déf :

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus aléatoire, et $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration de $\mathcal{F}$, On dit que :

prévision : $E(X_n / \mathcal{F}_{n-1}) = X_n$

1) X est $(\mathcal{F}_n)$-adapté si $\forall n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

2) X est $(\mathcal{F}_n)_n$-prévisible si X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable $\forall n \geq 1$.

Déf :

Un temps d'arrêt τ est une v.a à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ telle que :

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \geq 0.$$

$$\{\omega ; \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n \quad , \forall n \geq 0.$$

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt.

Remarque :

On pourra vérifier que τ est un temps d'arrêt ssi :

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F} \quad , \forall n \geq 0$$

Proposition :

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus $(\mathcal{F}_n)$-adapté à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. $T_A := \inf\{n \geq 0 , X_n \in A\}$ est un temps d'arrêt.

$$\{T_A \leq n\} = \bigcup_{k \leq n} \{X_k \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

Prop :

① Soient τ et θ deux temps d'arrêt alors :

$\tau \wedge \theta$, $\tau \vee \theta$, $\tau + \theta$ sont des temps d'arrêt.

② Si $c \geq 0$ alors : $\tau + c$, $(1+c)\tau$ sont des temps d'arrêt.

③ Soit $(\tau_n)_n$ une suite de temps : $\liminf_n \tau_n$, $\limsup_n \tau_n$ sont des temps d'arrêt.

Prop :

Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus aléatoire à valeurs dans un espace mesuré (E, ξ), et τ un temps d'arrêt.

Alors la fct aléatoire :

$X_\tau : \omega \in \Omega \longrightarrow X_{\tau(\omega)}(\omega)$ est une v.a mesurable.

Dém :

X_τ est $\mathcal{F}$-mes , on écrit que :

$\forall A \in \xi, \quad (X_\tau)^{-1}(A) = \bigcup_{k\geq 0} \left[\{\tau = k\} \cap (X_k)^{-1}(A) \right]$

$\{\tau = k\}$ et $(X_k)^{-1}(A)$ sous dans $\mathcal{F}_k \in \mathcal{F}_n$.

Déf :

On dit que le processus $\{X_t, t \in T\}$ appartient à la classe L_p et on note $X_t \in L_p$, $t \in T$ si $\mathbb{E}|X_t|^p < \infty, \forall t \in T$

Remarque :

Soit $X_t \in L_2$. Dans le cas nous pouvons définir les fcts $E(X_t) = m(t)$

$$R(s,t) = E\left[(X_s - m(s))(X_t - m(t))\right] = cov(X_s, X_t).$$

que l'on appelle la moyenne et la fct de corrélation du processus X_t resp. $R(s,t) = R(t,s)$, $(s,t) \in T \times T$

Exemple :

Soit $X \sim \mathcal{N}(a, \delta)$, $E(X) = a$, $var(X) = \delta^2$.

On construit le processus :

$Z_t = b + tX$, $b \in \mathbb{R}$.

Déf :

Une fct $R(s,t)$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ est dite définie positive si : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_k)^t \in \mathbb{R}^k$, $(t_1, \dots, t_k)^t \in \mathbb{R}^k$.

$\sum x_i x_j R(t_i, t_j) \geq 0$. $x^t R(\cdot,\cdot) x$

Exemple :

$L(s,t) = \exp(|s-t|)$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

$L(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{k \times k}$ $\quad L(s,t) = \min(s,t)$

$(x_1, \dots, x_k)^t$, $(y_1, \dots, y_k)^t$ $\quad \begin{pmatrix} a_{11} = \min(x_1, y_1) & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ & & & \end{pmatrix}$

Théorème :

Soit $R(s,t)$ la fct de corrélation d'un processus X_t, $t \in T$, alors $R(s,t)$ est définie positive

Déf :

On dit que le processus $\{X_t, t \in T\}$ est stochastiquement continue en un point t si pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\{\omega : |X_{t+\Delta t} - X_t| > \varepsilon\} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

autrement dit :

le processus $\{X_t, t \in T\}$ est stochastiquement aléatoire continue en t si : $X_{t+\Delta t} \xrightarrow{P} X_t$ lorsque $\Delta t \to 0$.

Déf :

Une processus aléatoire $\{X_t, t \in T\}$ est uniformement stochastiquement continue sur T si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$.

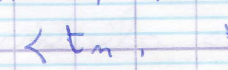
telque : $P\{\omega : |X_t - X_s| > \varepsilon\} < \varepsilon$.
$\forall\, t,s$ tels que : $|t-s| < \delta$.

Remarque :
Si $\{X_t, t\in\mathbb{R}\}$ est stoch continue sur un compact $T\in\mathbb{R}$, alors il est uniformement stochastiquement continue. En plus il est stoch borné sur T.
i.e $\sup_{t\in T} P(|X_t| > N) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

Théorème : (Kolmogorov).
Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus et $\exists\, p,q,c\in\mathbb{R}$ tq :
$E[|X_{t+s} - X_s|^p] \leq c\,|t-s|^{1+q}$
Alors presque toutes les trajectoires de X sont continue.

Déf :
Un processus aléatoire $\{X_t, t\in T\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un processus à accroissement indépendants si $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $0\leq t_1\leq \dots \leq t_n\in\mathbb{R}$
Les variables aléatoires $X_0, X_{t_1}-X_0, \dots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ sont 2 à 2 indépendantes.

Exemple :
On considère n v.a indé $X_1,\dots,X_n$ sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ on choisit n nbrs $t_1<t_2<\dots<t_n$, $t_i\in[a,b]$.
et on construit le processus aléatoire : $Z_t = \sum_{t_i<t} X_i$, $t\in[a,b]$



Processus stationnaire

Déf : On dit que $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ est un processus strictement stationnaire, si pour tout n-uple de temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ($t \in \mathbb{R}$) et $\forall h \in \mathbb{R}$.
le vecteur aléatoire $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})^T$ a la m̂ loi que $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$.
En particulier pour $n = 1$.

$$P(X_t \leq x) = F_{X_t}(x) = F_{X_{t+h}}(x) = P(X_{t+1} \leq x) \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

théorème :

Si X_t, $t \in T$ est strictement stationnaire, tq : $E(X_t^2) < \infty$ $\forall t \in \mathbb{R}$, alors :

1) $E(X_t) = m$, $t \in T$.

2) $var(X_t) = \delta^2 > 0$, $t \in T$.

3) $R(t, s) = cov(X_t, X_s)$

$$= E[(X_t - m)(X_s - m)] = r(t - s)$$

i.e : La covariance est une fct de $(t - s)$.

Déf :

On dit que le processus $\{X_t, t \in T\}$ est faiblement ou tout simplement stationnaire si :

1) $E(X_t) = m$ $\quad \forall t \in T$.

2) $var(X_t) = \delta^2$ $\quad \forall t \in T$.

3) $cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_x(h)$ $\quad \forall t, t+h \in T$.

Remarque :

On dit que $\gamma(h)$ est la fct de correlation du processus $\{X_t, \; t \in T\}$.

Si X_t stationnaire $\gamma(h)$ est paire

$$\gamma(h) = cov(X_t, X_{t+h})$$
$$= cov(X_{t-h}, X_t) = \gamma(-h).$$

Théo : (ergodique pour les proc stat)

Soit $X(t)$ un proc stati

Si $r(t) \longrightarrow 0$, $t \to \infty$

alors $Y_t = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) \, dt \longrightarrow 0$.

Théo : (Bochner _ Khintchine)

Soit (X_t) un processus stationnaire tq:

Sa fct de correlation $\gamma(h)$ abs integrable sur $\mathbb{R}$. $\int_{\mathbb{R}} |\gamma(h)| \, dh < +\infty$.

Dans ce cas il existe la densité spectrale $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, du X_t tq: $\gamma(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{i\lambda h} \, d\lambda$.

Il suit que la densité spectrale est egale à :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(h) e^{-i\lambda h} \, dh.$$

En remarque :

$$E|X(t)|^2 = \gamma(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, d\lambda.$$

Déf :

Soit $(X_t, t \in T)$ un processus stationnaire.
On dit que $\{X_t\}$ est un proc stati de Bruit blanc ou bruit blanc si : $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ soit independantes. $\forall t_1, \dots, t_n$ $(t_j \in T)$
La fct de correlation de ce processus :

$$\gamma(h) = \delta^2 \mathbb{1}_{\{0\}}(h).$$

Remarque :

Si (X_t) est un proc stati de bruit blanc et $X(t)$ suit la loi normale $N(0, \delta^2)$ on dit que l'on a le bruit blanc gaussien.

Différentiation d'un processus aléatoire.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un processus aléatoire $E|X(t)|^p < +\infty$, $p = 1$ ou $p = 2$.
Nous disons que le processus $X(t)$ est dérivable en point s, s'il existe un élément $X(s) \in L^p$.
tq : $\lim_{t \to s} \left\| \frac{X(t) - X(s)}{t - s} \right\|_p = 0$.

Processus de Poisson.

Déf : On dit que le processus $X(t)$, $t \in T = [0, +\infty[$ est un processus de poisson de paramètre d'intensité $\lambda > 0$, si :

1) $X(0) = 0$.

2) $\forall t_0, t_1, \dots, t_n$ tq : $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$.
Les accroissements.
$X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont
independantes.

3) $\forall s, t$ avec $0 \leq s < t$.
l'accroissement $X(t) - X(s)$ suit une loi de poisson
de paramètre $\lambda(t-s)$.

$$P[X(t) - X(s) = k] = (\lambda(t-s))^k \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{k!} \quad , k \in \mathbb{N} \quad \text{--- } (1)$$

Remarque :
$m(t) = E(X(t)) = \lambda(t)$, $var(X(t)) = \lambda t$, $t \in T$.

Remarques
Soit $\Delta t > 0$. Dans ce cas de (1), on a, $\forall t \in T$

$$P\{(X(t + \Delta t)) - X(t) = 0\} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta(t)).$$

Lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$ et donc :
$X(t)$ est stochastiquement continue
De l'autre côté, on a :

$$P(X(t + \Delta t) - X(t) = 1) = \lambda \Delta t \, e^{-\lambda \Delta t} + o\Delta(t).$$

lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$.

i.e : $P(X(t + \Delta t) = k+1 \,/\, X(t) = k)$

$$= \lambda \Delta t + o(\Delta t) \qquad \Delta t \longrightarrow 0$$

d'où on tire que le processus $X(t)$ est dérivable (en proba).

Enfin, on remarque que :

$$P(X(t+\Delta t) - X(t) \geq 2) = 1 - P(X(t+\Delta t) - X(t) = 0)$$
$$- P(X(t+\Delta t) - X(t) = 1) = O(\Delta t).$$

lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$.

$$O(\Delta t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0 \qquad \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} C$$

$$o(\Delta t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0 \qquad \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

$$\frac{d(\Delta t)}{\Delta t} \longrightarrow C$$

i.e. $P(X(t+\Delta t) \geq k+2) / X(t) = k) = o(\Delta t)$ si $\Delta t \longrightarrow 0$

Remarque :

Notons que de la définition il suit que :

$$P_n(t) = P(X(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad t \in T, \; n \in \mathbb{N}.$$

Alors :

$$P_0(0) := P(X(0) = 0) = 1.$$

$$1 - P_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = P(X(t) \geq 1)$$
$$= \lambda t + O(\Delta t)$$

Alors :

$$\frac{1 - P_0(t)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \lambda.$$

Remarque :

Soit $0 << t$: alors $X(s)$ et $X(t-s)$ sont indep et donc :

$$cov(X(s), X(t-s)) = 0.$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} R(s,t) &= cov(X(s), X(t)) \\ &= cov(X(s), X(s) + X(t) - X(s)) \\ &= cov(X(s), X(s)) + cov(X(s), X(t) - X(s)) \\ &= \lambda s \\ &= \lambda \min(s,t). \end{aligned}$$

- $X(t)$ n'est pas stationnaire

Processus de poisson et temps d'attente

- Soit $X(t)$, $t \in T = [0, \infty[$ un processus de poisson de paramètre $\lambda > 0$. La variable $X(t)$ nous donne le nombre de saut du processus dans l'intervalle $[0, t]$
- Notons par τ_1 le temps d'attente du premier saut il est évident que : $\forall t \geq 0$. $P(\tau_1 > t) = P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}$.

et donc la fct de répartition de τ_1 est :

$$\begin{aligned} F(t) = P(\tau_1 \leq t) &= 1 - P(\tau_1 > t) \\ &= 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Alors $f_{\tau_1}(t)$ la densité de τ_1 est :

$$f_{\tau_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

i.e. $\tau_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$ et

$E(\tau_1) = \frac{1}{\lambda}$, $var(\tau_1) = \frac{1}{\lambda^2}$.

λ représente le nombre moyen de sauts que le processus $X(t)$ a par unité de temps.

De la même façon. Si τ représente le temps d'attente du premier saut quand on choisit comme une origine un moment $s > 0$, on a :

$$P(\tau > t) = P(X(t+s) - X(s) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

On remarque :

$$P(\tau - s > t \,/\, \tau > s) = \frac{P(\tau - s > t,\ \tau > s)}{P(\tau > s)}$$

$$= \frac{P(\tau > s+t)}{P(\tau > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}$$

$$= e^{-\lambda t}.$$

- On appelle un tel modèle "Sans vieillissement". On a vu cette propriété de perte de mémoire dans un modèle de la loi géométrique.