Université de Biskra
Département d’Informatique

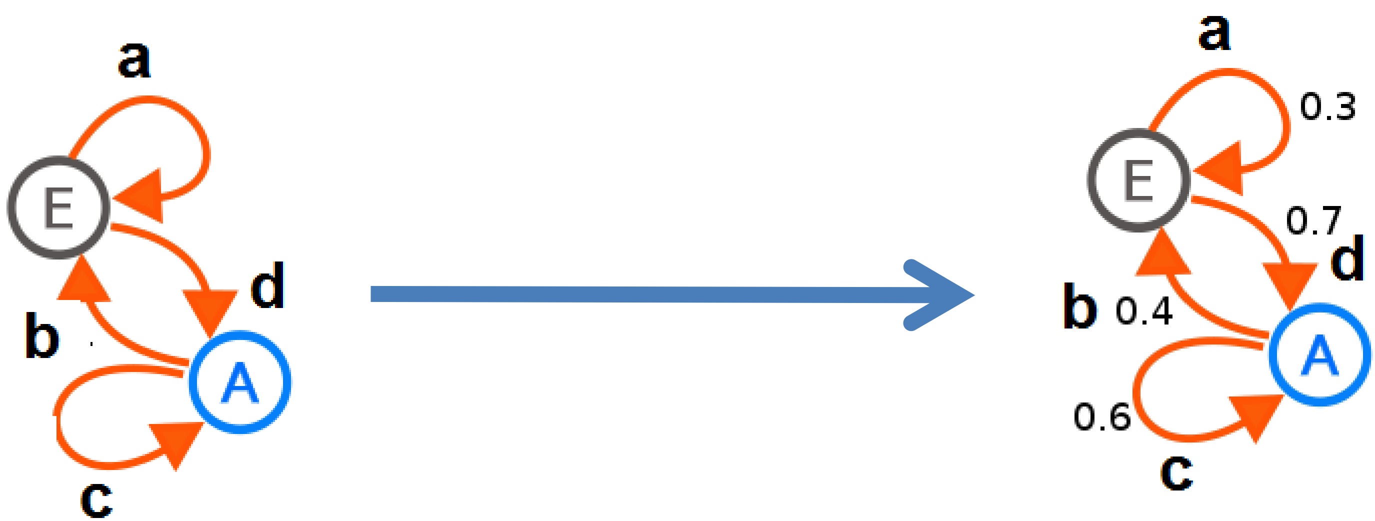
Cours MEPS (vidéo 8-9. Slides: 1-18)

Cours de chaînes de Markov

(Partie 1&2)

Cours MEPS
2019-2020
M1-IA
Pr. Laid Kahloul

Il s'agit de quoi?



Plan du cours

- **Introduction**: expérience aléatoires, événements, probabilité, probabilité conditionnelle.

- **Variables aléatoires**: C'est quoi?, types (discrètes, continues), fonction de densité, fonction de répartition, loi de probabilité, lois usuelles

- **Processus stochastique**: C'est quoi?, Exemple, Définition, Types (processus, chaine, discret, continue).

- **Chaine de Markov**: C'est quoi?, exemple, Définition,

Introduction

Rappel général sur les probabilités

L'Expérience Aléatoire (1)

c'est quoi?

- Expérience aléatoire: une expérience dont le **résultat** (ou ensemble de résultats) est **aléatoires**,

et

- donc il est **impossible de prédire de manière absolue** ce résultat,

L’Expérience Aléatoire (2)

Exemples:

1. résultat de jeter un dé (une valeur aléatoire de 1..6, mais on ne sait pas exactement laquelle),

2. résultat de jeter une pièce de monnaie (pile ou face, mais jamais on n’est sûre laquelle),

3. temps d’attente dans un guichet (de 0 jusqu’à l’infinie peut être),

L’Expérience Aléatoire (3)

ensemble de résultats

- Donc chaque expérience a un ensemble de résultats:

  fini ou infini, réels ou discrets, …

L’Expérience Aléatoire (4)

ensemble de résultats

- Les résultats de l’expériences aléatoire sont donc un ensemble (dit aussi univers) qu’on peut noter: Ω
- **Exemple**:

Expérience aléatoire	**L’ensemble des résultats**
Jeter un dé	Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}
Jeter une pièce de monnaie	Ω={pile, face}
Mesurer le temps d’attente pou avoir service d’un guichet	Ω=[0, +∝[
Tirer une personne au hasard d’une popultation	{personne1, personne2, personne3, …}

Événement Aléatoire (1)

Définition

- Un événement aléatoire est **une partie (<u>un sous ensemble</u>) de l'ensemble des résultats** possibles de l'expérience aléatoire,

- C'est donc un **sous-ensemble A** de l'univers Ω.

- On dit que l'événement **A** est **<u>réalisé</u>** si le résultat **ω** de l'expérience appartient à **A**.

Événement Aléatoire (2)

Exemples et remarques

- Pour Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6} l'univers de tous les résultats du jet d'un dé

- L'ensemble noté $\mathcal{A}$ de tous les événements liés à Ω est donné par tous les sous ensembles de Ω

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \ldots, \{6\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,6\}, \{2,3\}, \ldots, \{2,3,4,5,6\}, \Omega\}$$

- L'ensemble Ø est appelé l'événement impossible et Ω est appelé l'événement certain.

- Un événement **A** est donc un élément de $\mathcal{A}$

Événement Aléatoire (3)

Exemples

- Événement1: “on a obtenu un chiffre pair lors d’un lancer d’un dé à 6 faces”, Dans ce cas on a ***A = {2, 4, 6},*** qui est un sous-ensemble ***de Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}***.

- Événement2: “la durée de vie du composant est supérieure ou égale à 1000 heures”, ***A = [1000, +∞[*** est un sous-ensemble de **$\Omega = R^{+}$.**

Probabilité (1)
Définition

- Soit **Ω** un univers associé à une expérience aléatoire et soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de **Ω.**

- Une probabilité ***P*** sur l'espace **(Ω,** $\mathcal{A}$ **)** est une application de $\mathcal{A}$ dans **[0, 1]** telle que

- **(Ω,** $\mathcal{A}$ **, P)** est dit espace de probabilité.

Probabilité (2)

Propriétés

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$
2. *Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une famille d'événements de* $\mathcal{A}$ *2 à 2 incompatibles,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Exemple: Les résultat du lacer de dé={1, 2, 3, 4, 5, 6}.

1) P({1, 2, 3, 4, 5, 6})=1. L'événement certain. Car certainement le résultat doit toujours faire partie de cet ensemble.

2) P({1})=1/6. Si le dé n'est pas truqué alors on parle d'une probabilité uniforme, P({2})=1/6. Alors on va avoir:

P({1}U{2})=P({1,2})=2/6=P({1})+P({2})

Probabilité conditionnelle

Définition

- Soit **A** et **B** deux événements, avec **P(B)** non nulle

- La **probabilité conditionnelle** de A sachant que B s'est réalisé (ou probabilité de A sachant *B*) est le nombre réel noté par:

$$\mathbb{P}(A \mid B) \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}_B(A)$$

et défini par :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Probabilité conditionnelle **exemple (1)**

- La probabilité d'avoir fait un 6 au lancer de dé sachant que le résultat est pair ?

$$P(\{6\}|\{2, 4, 6\})=P(\{6\}\cap\{2, 4, 6\})/P(\{2, 4, 6\})$$

$$= P(\{6\})/P(\{2, 4, 6\})$$

$$=(1/6)/(1/2)$$

$$=1/6 * 2/1$$

$$=2/6=1/3$$

Probabilité conditionnelle **exemple (2)**

- La probabilité d'avoir fait Pile au premier lancer sachant qu'il y a au moins un lancer avec Pile sur deux.

Il y’a quatre événements={p en premier lancé et f en deuxième lancé, p et p, f et p, f et f}

P({pile en premier lancer})=p{(p,f), (p,p)}=1/2

P({au moins un p})=p({(p,f), (p,p), (f,p)})=3/4

P({pile en premier lancer}$\cap${au moins un p})=p(p{(p,f), (p,p)})=1/2

P(A|B)=(1/2)/(3/4)=2/3

Probabilité conditionnelle
Indépendance

- Deux événements A et B sont dits indépendants ssi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$