# الفائدة المركبة

إذا كان الأساس في احتساب الفائدة البسيطة هو أصل المبلغ المقترض أو المودع الذى يظل ثابتاً لا يتغير طوال فترة الاقتراض أو الإيداع، حيث يترتب على ذلك تساوى مقدار الفائدة البسيطة المحسوبة على الأصل في نهاية كل وحدة زمنية، فإنه في حالة الفائدة مركبة تحتسب فائدة إضافية على كل من الأصل والفوائد المستحقة معاً.

بمعنى، أن قانون الفائدة المركبة يعتبر أن المبلغ الأصلي الذي تحتسب على أساسه الفوائد متغير من وحدة زمنية إلى أخرى، عن طريق تراكم فائدة الوحدة الزمنية على أصل المبلغ في كل مرة تضاف فيها الفوائد، وتكون الحصيلة في النهاية جملة مبلغ أكبر مما لو احتسبت الفوائد على أساس أصل المبلغ المودع أو المقترض في أول مدة، خاصة إذا ما طالت الفترة الزمنية. ومن هذا المنطلق، تقتصر الفائدة البسيطة على الإيداعات والقروض قصيرة الأجل، بينما تقتصر الفائدة المركبة على عمليات الإيداع والاقتراض طويلة الأجل بشرط ألا تسحب الفوائد بأصولها في نهاية كل فترة.

**مثال:** إذا افترضنا أن شخصاً ما قد أودع مبلغ 50000 دينار لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة قدرها 12٪ سنوياً، فما هو مجموع ما يتحصل عليه في نهاية المدة على أساس أن الفوائد تحتسب:

1. بمعدل فائدة بسيطة
2. بمعدل فائدة مركبة

**الحل:**

**- على أساس فائدة بسيطة**

- فائدة السنة الأولى = (1)x(0.12)x(50000) = **6000** دينار
- فائدة السنة الثانية = (1)x(0.12)x(50000) = **6000** دينار
- فائدة السنة الثالثة = (1)x(0.12)x(50000) = **6000** دينار

مجموع الفوائد المستحقة للشخص في نهاية مدة الإيداع هي 18000 دينار

إجمالي ما يتحصل عليه الشخص في نهاية مدة الإيداع

جملة المبلغ = 50000 + 18000 = 68000 دينار

وبتطبيق قانون الجملة في حالة الفائدة البسيطة

$$S = C(1+ni) \Rightarrow S = 50000[1+(3)(0.12)] \Rightarrow S = 50000(1.36) \Rightarrow S = 68000$$

**2- على أساس فائدة مركبة**

- فائدة السنة الأولى = (1)x(0.12)x(50000) = **6000** دينار، وبذلك يكون رصيد هذا الشخص في نهاية السنة الأولى بعد إضافة الفوائد (50000+6000) = **56000** دينار، وهذا المبلغ يعتبر الأصل الجديد الذي على أساسه تحتسب فوائد السنة الثانية.

- فائدة السنة الثانية = (1)x(0.12)x (56000) = **6720** دينار، وبنفس الطريقة يكون الرصيد الجديد في نهاية السنة الثانية بعد إضافة الفوائد الجديدة هو (56000+6720) = 62720 دينار، وهذا الرصيد سيتحول إلى الأصل الجديد الذي على أساسه تحتسب فوائد السنة الثالثة.

- فائدة السنة الثالثة = (1)x(0.12)x (62720) = 7526.4 دينار

وهكذا سيكون إجمالي ما يتحصل عليه الشخص في نهاية مدة الإيداع هو قيمة الرصيد في السنة الثالثة

جملة المبلغ = 62720 + 7526.4 = **70246.4** دينار، كما أن هذا المبلغ يمكن حسابه عن طريق إضافة فوائد كل سنة إلى الأصل الأول، أي أن جملة المبلغ = (فوائد السنة الأولى 6000) + (فوائد السنة الثانية 6720) + (فوائد السنة الثالثة 7526.4) + (الأصل الأول 50000) = **70246.4** دينار.

## القانون الأساسي للفائدة المركبة

| الفترة الزمنية | المبلغ الأصلي | مقدار الفائدة | الجملة |
|---|---|---|---|
| 1 | $C$ | $I_1 = Ci$ | $S_1 = C + Ci \Rightarrow \mathbf{S_1 = C(1+i)}$ |
| 2 | $C(1+i)$ | $I_2 = C(1+i)(i)$ | $S_2 = C(1+i) + C(1+i)(i) \Rightarrow S_2 = C(1+i)(1+i)$ <br> $\mathbf{S_2 = C(1+i)^2}$ |
| 3 | $C(1+i)^2$ | $I_3 = C(1+i)^2(i)$ | $S_3 = C(1+i)^2 + C(1+i)^2(i) \Rightarrow S_3 = C(1+i)^2(1+i)$ <br> $\mathbf{S_3 = C(1+i)^3}$ |
| . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| n-1 | $C(1+i)^{n-2}$ | $I_{n-1} = C(1+i)^{n-2}(i)$ | $S_{n-1} = C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-2}(i) = C(1+i)^{n-2}(1+i)$ <br> $\mathbf{S_{n-1} = C(1+i)^{n-1}}$ |
| n | $C(1+i)^{n-1}$ | $\mathbf{I_n = C(1+i)^{n-1}(i)}$ | $S = C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-1}(i) = C(1+i)^{n-1}(1+i)$ <br> $\mathbf{S = C(1+i)^n}$ |

ومنه، فإن جملة المبلغ المحصل عليه في نهاية الفترة (n) تحسب وفقا للعبارة التالية:

$$S = C(1+i)^n$$

وبتطبيق القانون الأساسي للفائدة المركبة على المثال السابق

$$S_n = C(1+i)^n \Rightarrow S = 50000[(1+0.12)^3] \Rightarrow S = 50000(1.404928) \Rightarrow S = 70246.4$$

إجمالي ما يتحصل عليه الشخص في نهاية مدة الإيداع على اعتبار الفائدة مركبة هو 70246.4 دينار

وتكون مجموع الفوائد المستحقة لهذا الشخص هي 70246.4 – 50000 = **20246.4** دينار

أما بتطبيق قانون الجملة في حالة الفائدة البسيطة

$$S = C(1+ni) \Rightarrow S = 50000[1+(3)(0.12)] \Rightarrow S = 50000(1.36) \Rightarrow S = 68000$$

وتكون فرق بين الفوائد المركبة والبسيطة هي 20246.4 – 18000 = **2246.4** دينار

**مثال**: أودع شخص مبلغ 40000 دينار على أن يسحب جميع مستحقاته بعد أربع سنوات من تاريخ الإيداع، فإذا كان البنك يحتسب له الفوائد بمعدل فائدة مركبة 10٪ سنويا، فما هي المدة اللازمة لكي يتحصل على نفس قيمة الفوائد في حالة كون الفوائد بسيطة.

**الحل:**

**1- على أساس فائدة مركبة:**

- الجملة: $S = C(1+i)^n \Rightarrow S = 40000[(1+0.1)^4] \Rightarrow S = 40000(1.4641) \Rightarrow \mathbf{S = 58564}$

- مجموع الفوائد: 58564 – 40000 = **18546** دينار

وبتطبيق قانون احتساب الفوائد: $I_n = C(1+i)^{n-1}(i)$

فوائد السنة الأولى: $I_1 = Ci \Rightarrow I_1 = 40000(0.1) \Rightarrow I_1 = \mathbf{4000}$

فوائد السنة الثانية: $I_2 = 40000(1+0.1)^1(0.1) \Rightarrow I_2 = \mathbf{4400}$

فوائد السنة الثالثة: $I_3 = 40000(1+0.1)^2(0.1) \Rightarrow I_3 = \mathbf{4840}$

فوائد السنة الرابعة: $I_4 = 40000(1+0.1)^3(0.1) \Rightarrow I_4 = \mathbf{5324}$

- مجموع الفوائد: 4000 + 4400 + 4840 + 5324 = **18564** دينار

**2- على أساس فائدة بسيطة:**

- مجموع الفوائد بدلالة مدة الإيداع(n): $I = Cni \Rightarrow I = 40000(n)(0.1) \Rightarrow \mathbf{I = 4000(n)}$

وحتى يتحصل على نفس قيمة مجموع الفوائد فإن: $4000(n) = 18564 \Rightarrow n = 4.641$

المدة (4.641 سنة) تعني4 سنوات و(0.641x12=7.692) أي 7 شهور و(0.692x30=20.76) أي 21 يوم.

إذن للحصول على نفس قيمة الفوائد المركبة يتطلب مدة أطول في حالة كون الفوائد بسيطة.

من أجل تطبيق القانون الأساسي للفائدة المركبة يشترط التجانس بين فترة إضافة الفوائد ومعدل الفائدة ومدة إحتساب الفوائد وان تكون هذه المتغيرات مقاسة بنفس وحدة القياس، فإذا كانت الفوائد تضاف كل سنة يجب أن يكون المعدل سنوياً، وإذا كانت تضاف كل نصف سنة يكون المعدل نصف سنوي...وهكذا. والجدول التالي يوضح بعض الأمثلة للمعدل السنوي الاسمي 12٪ المذكور في المثال السابق ومعدلات الفائدة المقابلة لوحدات الزمن التي تتم فيها إضافة الفوائد.

| فترة إضافة الفوائد | عدد مرات الإضافة | المعدل الاسمي المقابل لوحدة الزمن | المعدل الحقيقي السنوي $i_r = (1+i)^n - 1$ |
|---|---|---|---|
| تضاف كل سنة | 1 | %12 ÷ 1 = %12 | $i_r = (1+0.12)^1 - 1 = (\%12)$ |
| تضاف كل نصف سنة | 2 | %12 ÷ 2 = %6 | $i_r = (1+0.06)^2 - 1 = (12.36\%)$ |
| تضاف كل ربع سنة | 4 | %12 ÷ 4 = %3 | $i_r = (1+0.03)^4 - 1 = (12.55\%)$ |
| تضاف كل شهر | 12 | %12 ÷ 12 = %1 | $i_r = (1+0.01)^{12} - 1 = (12.68\%)$ |
| تضاف كل يوم | 360 | %12 ÷ 360 = 0.00033333 | $i_r = (1+0.00033333)^{360} - 1$ <br> $i_r = (12.75\%)$ |

المعدل الحقيقي السنوي هو عبارة عن معدل الزيادة الفعلية لكل وحدة نقدية نتيجة إضافة الفائدة أكثر من مرة واحدة في السنة، حيث يكون أعلى معدل حقيقي للفائدة في حالة عدد مرات الإضافة الأكثر، ويكون في أقل قيمة له عندما تكون الإضافة كل سنة أو مرة واحدة فقط في السنة، وهو في هذه الحالة نفسه معدل الفائدة السنوي.

**مثال:** إذا كان معدل الفائدة السنوي 18٪ تضاف به الفوائد المركبة كل شهر. أوجد عدد مرات الإضافة والمعدل المقابل والحقيقي.

**الحل:**

عندما تضاف الفوائد كل شهر، يكون عدد مرات الإضافة في السنة الواحدة هو 12 مرة

ويكون معدل الفائدة الاسمي المقابل لكل شهر هو $= \frac{\%18}{12} =$ 1.5٪ شهرياً

بهذا المعدل الشهري ستضاف الفوائد كل شهر ثم تتراكم وتتراكم لأنه تحسب عليها فوائد أخرى وهكذا وفي الأخير سيكون مجموع هذه الفوائد بعد نهاية السنة أكبر من الفوائد التي ستضاف مرة واحدة خلال نهاية السنة، لذلك من الأفضل الاعتماد في حساب الفوائد على المعدل الحقيقي

وحسب المثال يكون معدل الفائدة السنوي الحقيقي هو:

$$i_r = (1+i)^n - 1 \Rightarrow i_r = (1+0.015)^{12} - 1 \Rightarrow i_r = (1.19561817) - 1 \Rightarrow i_r = 0.1956 \Rightarrow i_r = (19.56\%)$$

**مثال:** ما هو المعدل الحقيقي السنوي، إذا كانت الفوائد تضاف للأصل كل ربع سنة بمعدل فائدة مركبة 12٪ سنويا؟

**الحل:**

- عندما تضاف الفوائد كل ربع سنة (أي كل ثلاثة شهور)، يكون عدد مرات الإضافة في السنة الواحدة هو 4 مرات

- معدل الفائدة المقابل لوحدة الزمن (الثلاثي) = $\frac{\%12}{4}$ = 3٪ ثلاثياً (أي كل ثلاثي)

المعدل الحقيقي السنوي

$$i_r = (1+i)^n - 1 \Rightarrow i_r = (1+0.03)^4 - 1 \Rightarrow i_r = (1.12550881) - 1 \Rightarrow i_r = 0.1255 \Rightarrow i_r = (12.55\%)$$

**تطبيق:** أوجد الفوائد والجملة المستحقة لمبلغ 20000 دينار، أودع لمدة 10 سنوات بمعدل فائدة مركبة 16٪ سنوياً إذا كانت:

1 - الفوائد تضاف كل سنة.
2 - الفوائد تضاف كل نصف سنة.
3 - الفوائد تضاف كل ربع سنة.
4 - الفوائد تضاف كل شهر.
5 - الفوائد تضاف كل يوم.

## جملة الدفعات المتساوية

### 1- جملة الدفعات العادية

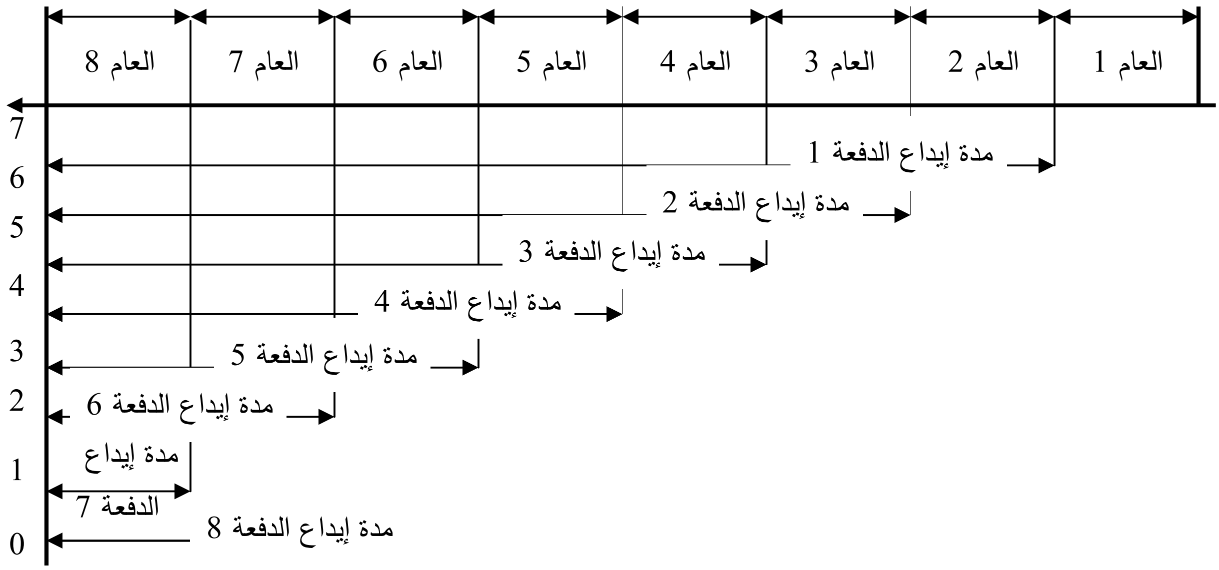
تعرف الدفعات بأنها عادية إذا كانت تدفع في آخر كل فترة زمنية منتظمة وبشكل دوري، وتكون قيمة جملة هذه الدفعات تساوي مجموع جملة كل دفعة من هذه الدفعات عند تاريخ دفع آخر دفعة.

**مثال:** من أجل تسديد قيمة عقار يودع شخص مبلغ 150000 دينار في نهاية كل سنة، ولمدة 8 سنوات بمعدل فائدة مركبة 10٪ سنويا.

المطلوب: احسب قيمة هذا العقار.

التمثيل البياني للمشكلة

**الحل:**



يمكن تمثيل ذلك في الجدول التالي:

| الدفعات | مدة الإيداع | الجملة |
|---|---|---|
| الدفعة الأولى | (8-1) = 7 | $S_1 = 150000(1+0.1)^{8-1}$ |
| الدفعة الثانية | (8-2) = 6 | $S_2 = 150000(1+0.1)^{8-2}$ |
| الدفعة الثالثة | (8-3) = 5 | $S_3 = 150000(1+0.1)^{8-3}$ |
| الدفعة الرابعة | (8-4) = 4 | $S_4 = 150000(1+0.1)^{8-4}$ |
| الدفعة الخامسة | (8-5) = 3 | $S_5 = 150000(1+0.1)^{8-5}$ |
| الدفعة السادسة | (8-6) = 2 | $S_6 = 150000(1+0.1)^{8-6}$ |
| الدفعة السابعة | (8-7) = 1 | $S_7 = 150000(1+0.1)^{8-7}$ |
| الدفعة الثامنة | (8-8) = 0 | $S_8 = 150000(1+0.1)^{8-8}$ |

$$S_n = \sum_{j=1}^{m} S_j = 150000(1+0.1)^0 + 150000(1+0.1)^1 150000(1+0.1)^2 + 150000(1+0.1)^3 + 150000(1+0.1)^4$$

$$+ 150000(1+0.1)^5 + 150000(1+0.1)^6 + 150000(1+0.1)^7$$

بملاحظة عناصر هذه الجملة نجد أنها على شكل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول C=150000 وأساسها (1+0.1) = (1+i) وعدد حدودها n = 8 وإذا كان قانون مجموع حدود المتتالية الهندسية S أساسها هو r عدد حدودها n وحدها الأول $U_1$، هو على الشكل:

$$S = U_1 . \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

فإن جملة مجموع الدفعات S هو:

$$S = C . \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S = 150000 . \frac{(1+0.1)^8 - 1}{0.1} = 1715383.22$$

$$S = \sum_{j=1}^{m} S_j = 150000(1) + 150000(1.1) + 150000(1.21) + 150000(1.331) + 150000(1.4641)$$

$$+ 150000(1.61051) + 150000(1.771561) + 150000(1.9487171)$$

$$S = \sum_{j=1}^{m} S_j = 1715383.22$$

## 2- جملة الدفعات الفورية

الدفعات الفورية هي مبالغ تودع دوريا في بداية كل فترة زمنية، الغرض منها هو تجميع أو تكوين رأسمال في نهاية مدة الإيداع، تكون فيها مدة أول دفعة في بداية الفترة الزمنية، أما مدة آخر دفعة تكون قبل نهاية مدة الإيداع بفترة زمنية واحدة.

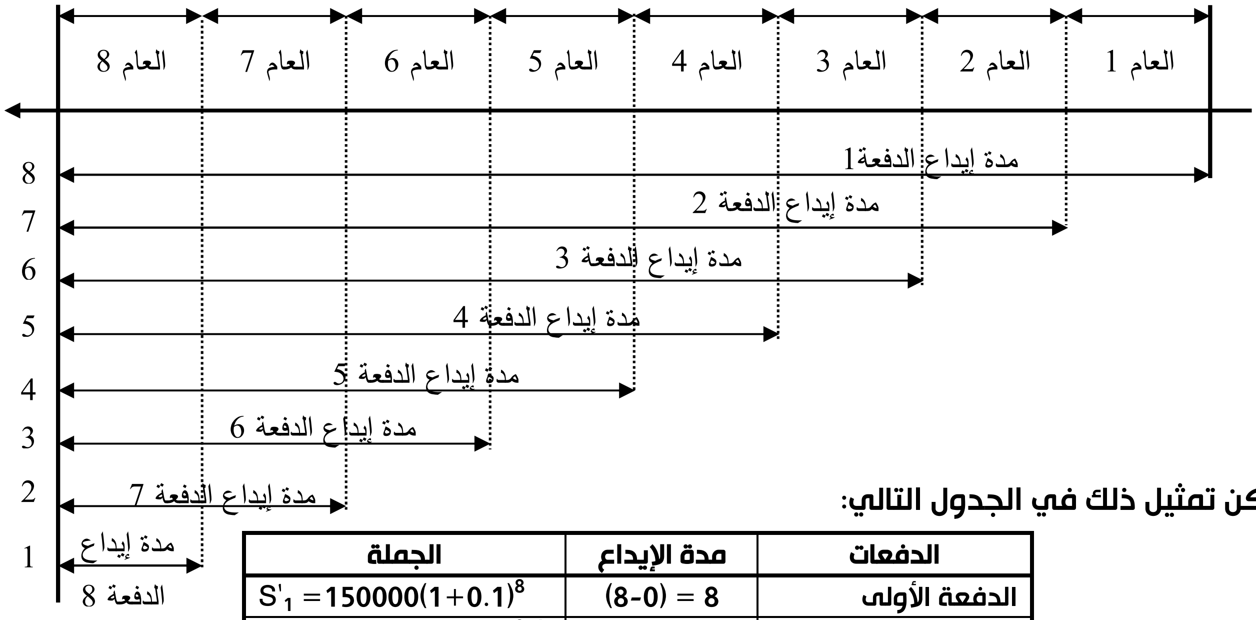
**مثال**: بالرجوع للمثال السابق، ونفترض أن هذا الشخص يودع مبلغ 150000 دينار في بداية كل سنة ولمدة 8 سنوات، بنفس معدل الفائدة المركبة السنوي.

المطلوب:

فما هي قيمة هذا العقار في مثل هذه الحالة.

**الحل:**

**التمثيل البياني للمشكلة**




**يمكن تمثيل ذلك في الجدول التالي:**

| الدفعات | مدة الإيداع | الجملة |
|---|---|---|
| الدفعة الأولى | (8-0) = 8 | $S'_1 = 150000(1+0.1)^{8}$ |
| الدفعة الثانية | (8-1) = 7 | $S'_2 = 150000(1+0.1)^{8-1}$ |
| الدفعة الثالثة | (8-2) = 6 | $S'_3 = 150000(1+0.1)^{8-2}$ |
| الدفعة الرابعة | (8-3) = 5 | $S'_4 = 150000(1+0.1)^{8-3}$ |
| الدفعة الخامسة | (8-4) = 4 | $S'_5 = 150000(1+0.1)^{8-4}$ |
| الدفعة السادسة | (8-5) = 3 | $S'_6 = 150000(1+0.1)^{8-5}$ |
| الدفعة السابعة | (8-6) = 2 | $S'_7 = 150000(1+0.1)^{8-6}$ |
| الدفعة الثامنة | (8-7) = 1 | $S'_8 = 150000(1+0.1)^{8-7}$ |

$$S'_n = \sum_{j=1}^{m} S'_j = 150000(1+0.1)^1 + 150000(1+0.1)^2 + 150000(1+0.1)^3 + 150000(1+0.1)^4 + 150000(1+0.1)^5 +$$

$$150000(1+0.1)^6 + 150000(1+0.1)^7 + 150000(1+0.1)^8$$

**وعليه فإن عناصر هذه الجملة تشكل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $C(1+i) = 150000(1+0.1)$ وأساسها $(1+i) = (1+0.1)$ وعدد حدودها $n = 8$ وبتطبيق قانون مجموع حدود المتتالية الهندسية**

$$S = U_1 . \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

**فإن جملة مجموع الدفعات الفورية 'S هو:**

$$S' = C(1+i).\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \Rightarrow S' = C(1+i).\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad S' = 150000(1.1).\frac{(1+0.1)^8 - 1}{0.1} = 1886921.54$$

**وبمقارنة قانون جملة الدفعات العادية ($S_n$) بقانون جملة الدفعات الفورية ($S'$) يتضح أنه:**

$$S' = C(1+i).\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow S' = (1+i)C.\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow S' = (1+i)S_n$$

**فهذه العلاقة $S' = (1+i)S$ تعني أن جملة الدفعات الفورية ($S'$) هي جملة الدفعات العادية (S) بفترة زمنية واحدة لأن مدة الدفعات الفورية تزيد في زمنها عن مدة الدفعات العادية بفترة زمنية واحدة.**

**وبتطبيق هذه العلاقة على المثال السابق يمكن أن نجد جملة الدفعات الفورية، كما يلي:**

$$S' = (1+i)S \Rightarrow S' = (1+0.1)(1715383.22) = 1886921.54$$

## القيمة الحالية

القيمة الحالية لمبلغ ما هي قيمة هذا المبلغ قبل تاريخ استحقاقه بعد ما يطلق عليه الحطيطة التجارية، حيث تحسب القيمة الحالية لمبلغ واحد أو لعدة مبالغ مختلفة أو للدفعات عادية أم فورية.

**- القيمة الحالية لمبلغ واحد:** يمكن تحديد القيمة الحالية لمبلغ نقدي من خلال قانون الجملة:

$$S = C.(1+i)^n \Leftrightarrow C = \frac{S}{(1+i)^n} \Leftrightarrow C = S(1+i)^{-n}$$

في هذه الحالة فإن (i) هو معدل الخصم التجاري و (n) هو مدة الخصم

**مثال:** قدم تاجر للبنك كمبيالة قيمتها الاسمية 644204 دينار تستحق السداد بعد خمس سنوات من الآن ما هي القيمة الحالية لهذه الورقة بتاريخ الخصم، وما المبلغ الذي يتحصل عليها البنك مقابل خصم هذه الورقة، إذا علمت أن معدل الخصم التجاري هو ٪10 سنوياً؟

**الحل:**

- القيمة الحالية للكمبيالة = $C = \frac{S_n}{(1+i)^n} \Leftrightarrow C = \frac{644204}{(1+0.1)^5} \Leftrightarrow C = \frac{644204}{(1.61051)} \Rightarrow C = 400000$

- المبلغ الذي تحصل عليه البنك مقابل خصم الكمبيالة = 644204 – 400000 = **244204** دينار

**- القيمة الحالية لعدة مبالغ مختلفة:**

القيمة الحالية لعدة مبالغ مختلفة القيمة وتستحق على فترات زمنية غير منتظمة هي مجموع القيم الحالية لهذه المبالغ كل على حدة؛ أي أن:

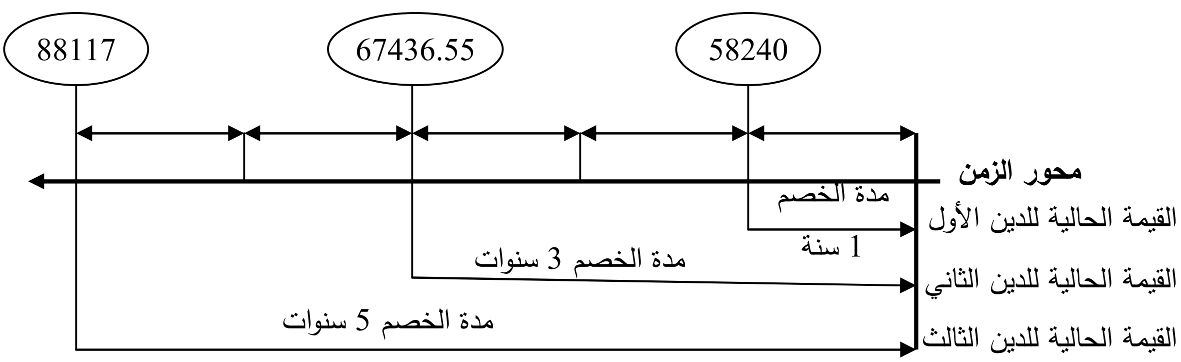
$$\sum C_n = \frac{S_1}{(1+i)^{n_1}} + \frac{S_2}{(1+i)^{n_2}} + \frac{S_3}{(1+i)^{n_3}} \text{.........} \frac{S_m}{(1+i)^{n_m}}$$

$$\sum C = \sum_{j=1}^{m} \frac{S_j}{(1+i)^{n_j}}$$

**مثال:** شخص مدين بمبلغ 58240 دينار يستحق الدفع بعد سنة، ومبلغ 67436.55 دينار يستحق السداد بعد سنتين من استحقاق الدين الأول. ومبلغ 88117 دينار تستحق بعد 5 سنوات من الآن، فإذا أراد أن يسدد كل هذه الديون مرة واحدة نقداً. فما هو المبلغ الذي يسدده هذا الشخص الآن، إذا علمت أن معدل الخصم التجاري ٪12 سنويا.

**الحل:**

التمثيل البياني




**- حساب القيمة الحالية للدين الأول**

$$C_1 = \frac{S_1}{(1+i)^{n_1}} \Leftrightarrow C_1 = \frac{58240}{(1+0.12)^1} \Leftrightarrow C_1 = \frac{58240}{(1.12)} \Rightarrow C_1 = 52000$$

- حساب القيمة الحالية للدين الثاني

$$C_2 = \frac{S_2}{(1+i)^{n_2}} \Leftrightarrow C_2 = \frac{67436.55}{(1+0.12)^3} \Leftrightarrow C_2 = \frac{67436.55}{(1.404928)} \Rightarrow C_2 = 48000$$

- حساب القيمة الحالية للدين الثالث

$$C_3 = \frac{S_3}{(1+i)^{n_3}} \Leftrightarrow C_3 = \frac{88117}{(1+0.12)^5} \Leftrightarrow C_3 = \frac{88117}{(1.76234)} \Rightarrow C_3 = 50000$$

أى أن هذا الشخص يجب أن يدفع نقدا مبلغ 52000 + 48000 + 50000 = 150000 دينار سداداً لديونه.

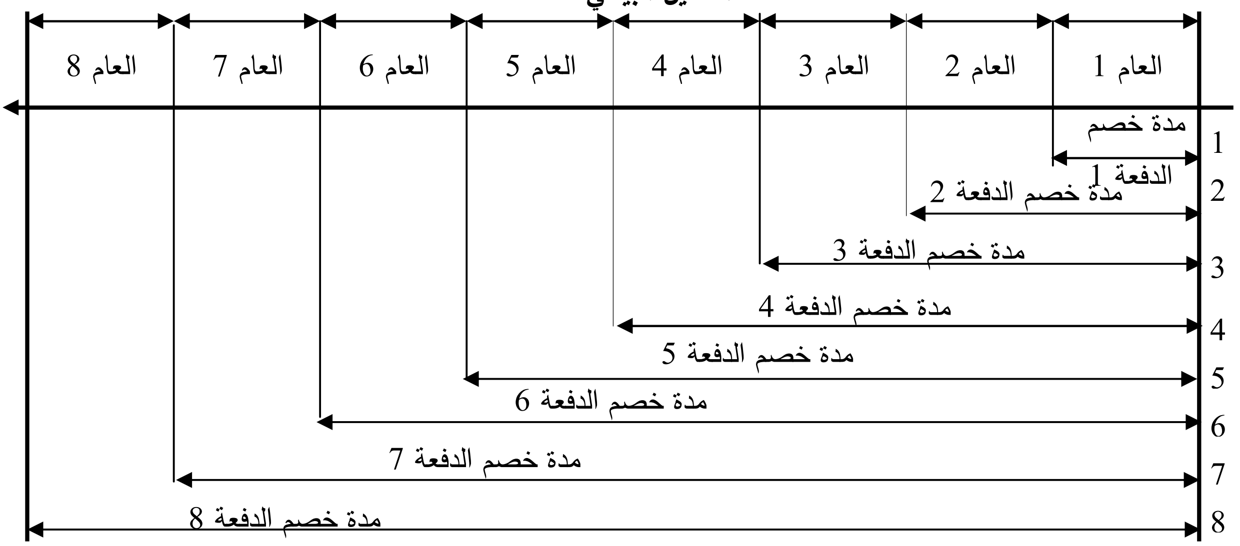
## القيمة الحالية للدفعات

**- القيمة الحالية للدفعات العادية:** بتطبيق القاعدة العامة في حساب القيمة الحالية، فإن القيمة الحالية للدفعات هي جمع القيم الحالية لكل دفعة على حدة.

**مثال:** يدفع شخص في نهاية كل سنة مبلغ 150000 دينار، لمدة 8 سنوات، لكنه أراد التخلص من هذا الدين فوراً، احسب قيمة ما عليه دفعه، إذا كان معدل الخصم والفائدة المركبة 10٪ سنويا.

**الحل:** ما يدفعه هذا الشخص فوراً سدادا لدينه يمثل مجموع القيم الحالية لهذه الدفعات.

التمثيل البياني للمشكلة




| الدفعات | مدة الخصم | الجملة |
|---|---|---|
| الدفعة الأولى | 1 | $C_1 = 150000(1+0.1)^{-1}$ |
| الدفعة الثانية | 2 | $C_2 = 150000(1+0.1)^{-2}$ |
| الدفعة الثالثة | 3 | $C_3 = 150000(1+0.1)^{-3}$ |
| الدفعة الرابعة | 4 | $C_4 = 150000(1+0.1)^{-4}$ |
| الدفعة الخامسة | 5 | $C_5 = 150000(1+0.1)^{-5}$ |
| الدفعة السادسة | 6 | $C_6 = 150000(1+0.1)^{-6}$ |
| الدفعة السابعة | 7 | $C_7 = 150000(1+0.1)^{-7}$ |
| الدفعة الثامنة | 8 | $C_8 = 150000(1+0.1)^{-8}$ |

$$C_m = \sum_{j=1}^{m} C_j = 150000(1+0.1)^{-1} + 150000(1+0.1)^{-2} + 150000(1+0.1)^{-3} + 150000(1+0.1)^{-4}$$

$$+ 150000(1+0.1)^{-5} + 150000(1+0.1)^{-6} + 150000(1+0.1)^{-7} + 150000(1+0.1)^{-8}$$

بملاحظة عناصر هذه الجملة ابتداء من آخرها نجد أنها على شكل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $S(1+i)^{-n} = 150000(1+0.1)^{-8}$ وأساسها $(1+i)=(1+0.1)$ وعدد حدودها $n = 8$ وإذا كان قانون مجموع حدود المتتالية الهندسية S أساسها r عدد حدودها n وحدها الأول $U_1$، هو على الشكل:

$$S = U_1.\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

فإن جملة مجموع الدفعات S هو:

$$\sum_{j=1}^{m} C_j = \frac{S}{(1+i)^1} + \frac{S}{(1+i)^2} + \frac{S}{(1+i)^3} \cdots\cdots\cdots \frac{S}{(1+i)^n}$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_j = S(1+i)^{-n}.\frac{(1+i)^n - 1}{i} = S.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\sum_{j=1}^{8} C_j = 150000.\frac{1-(1+0.1)^{-8}}{0.1} \Rightarrow C_8 = 800238.93$$

$$\sum_{j=1}^{8} C_j = \mathbf{800238.93}$$

لذلك، على هذا الشخص أن يدفع فوراً مبلغ 800238.93 دينار سدادا لدينه.

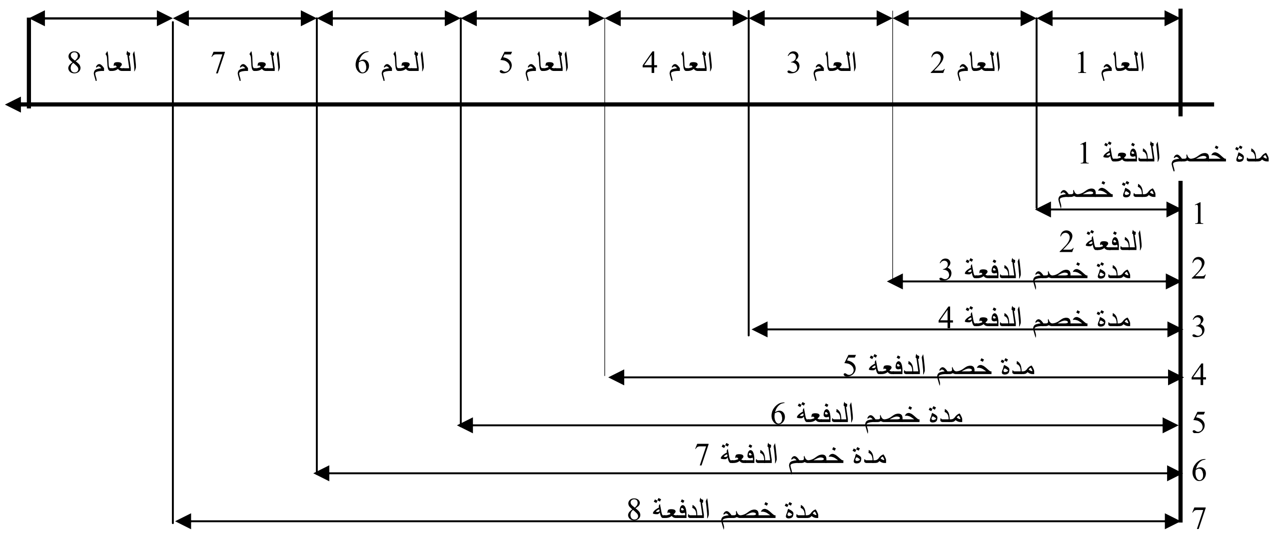
**- القيمة الحالية للدفعات الفورية**

تتمثل القيمة الحالية للدفعات الفورية في قيمة جميع هذه الدفعات عند تاريخ أول مدة؛ أي عند الفترة صفر والذي يتوافق مع تاريخ إيداع أول دفعة من سلسلة الدفعات.

**مثال:** بالرجوع للمثال السابق وبافتراض أن هذا الشخص كان يسدد في بداية كل سنة مبلغ 150000 دينار لمدة 8 سنوات، فإذا أراد التخلص من هذا الدين فوراً احسب قيمة ما عليه دفعه في هذه الحالة، إذا كان معدل الخصم والفائدة مركبة 10٪ سنويا.

**الحل:** ما يدفعه هذا الشخص فوراً سدادا لدينه يمثل مجموع القيم الحالية لهذه الدفعات.

التمثيل البياني للمشكلة



| الدفعات | مدة الخصم | الجملة |
|---|---|---|
| الدفعة الأولى | 0 | $C_1 = 150000(1+0.1)^{0}$ |
| الدفعة الثانية | 1 | $C_2 = 150000(1+0.1)^{-1}$ |
| الدفعة الثالثة | 2 | $C_3 = 150000(1+0.1)^{-2}$ |
| الدفعة الرابعة | 3 | $C_4 = 150000(1+0.1)^{-3}$ |
| الدفعة الخامسة | 4 | $C_5 = 150000(1+0.1)^{-4}$ |
| الدفعة السادسة | 5 | $C_6 = 150000(1+0.1)^{-5}$ |
| الدفعة السابعة | 6 | $C_7 = 150000(1+0.1)^{-6}$ |
| الدفعة الثامنة | 7 | $C_8 = 150000(1+0.1)^{-7}$ |

$$C_m = \sum_{j=1}^{m} C_j = 150000(1+0.1)^{0} + 150000(1+0.1)^{-1} + 150000(1+0.1)^{-2} + 150000(1+0.1)^{-3} + 150000(1+0.1)^{-4} +$$

$$150000(1+0.1)^{-5} + 150000(1+0.1)^{-6} + 150000(1+0.1)^{-7}$$

**بملاحظة عناصر هذه الجملة ابتداء من آخرها نجد أنها على شكل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $S(1+i)^{-(n-1)} = 150000(1+0.1)^{-(8-1)}$ وأساسها $(1+i)=(1+0.1)$ وعدد حدودها $n = 8$ وإذا كان قانون مجموع حدود المتتالية الهندسية S أساسها هو r عدد حدودها n وحدها الأول $U_1$، هو على الشكل:**

$$S = U_1 . \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

**فإن جملة مجموع الدفعات $S_n$ هو:**

$$\sum_{j=1}^{m} C_j = \frac{S}{(1+i)^1} + \frac{S}{(1+i)^2} + \frac{S}{(1+i)^3} \dots\dots\dots \frac{S}{(1+i)^n}$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_j = S(1+i)^{-(n-1)} . [\frac{(1+i)^n - 1}{i}] = S.[\frac{(1+i) - (1+i)^{-(n-1)}}{i}]$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_j = S.[1 + \frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i}]$$

**بتطبيق قانون جملة الدفعات الفورية على المثال، فإن :**

$$\sum_{j=1}^{m} C_j = S.[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}] \Rightarrow \sum_{j=1}^{8} C_j = 150000.[1 + \frac{1-(1+0.1)^{-(8-1)}}{0.1}]$$

$$\sum_{j=1}^{8} C_j = 880262.82$$

**لذلك، على هذا الشخص أن يدفع فوراً مبلغ 880262.82 دينار سدادا لدينه.**

**تطبيق: بالرجوع للتطبيق السابق وعلى افتراض أن هذا الشخص يسدد في بداية كل سنة مبلغ 100000 دينار ولمدة سبع سنوات، بمعدل فائدة مركبة 8٪ سنوياً، فما هي القيمة الحالية لهذه الدفعات ثم جملتها في نهاية مدة التسديد؟.**