Chapitre 5: Vecteurs aléatoires

1. Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $X = (X_1, ..., X_n)$ une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$, qui à tout élément w de Ω faut correspondre une suite $X(w) = (X_1(w), ..., X_n(w))$. On dit que X est un vecteur aléatoire si pour tout $i = \overline{1, n}$, l'application X_i est une v.a.
Si $n = 1$, on dit variable aléatoire.
Si $n = 2$, on dit couple de variables aléatoires où v.a à deux dimensions.

2. Couple de variables aléatoires

Le couple de variables aléatoires (X, Y) est défini comme une application $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ à valeurs dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exemple: On place au hasard deux boules rouge et vert dans deux boites A et B. On note X, la variable aléatoire « nombre de boules dans la boite A » et Y, la variable aléatoire « nombre de boites vides ».

Définition: On appelle fonction de répartition du couple (X, Y) la fonction

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

a. Cas discrèt

Définition : On dit que (X, Y) est un couple discèt si X et Y sont deux v.a discrètes.

a.1. Loi jointe d'un couple de v.a finies

On suppose que la v.a X prend l'une quelconque de m valeurs: $x_1, ..., x_m$ et que la v.a Y prend l'une quelconque de n valeurs: $y_1, ..., y_n$. La loi de répartition d'une v.a à deux dimension (X, Y) est définie par

$$P(X = x_i, Y = y_i) = p_{ij}, \qquad i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n$$

avec: $p_{ij} \geq 0$ et $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$. Cette loi peut être donnée par

$X(\Omega)$ \ $Y(\Omega)$		y	
x		$P(X = x \cap Y = y)$	

Définition : La probabilité que $X = x_i$, $i = 1, ..., m$ est donnée par

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_{i\bullet}$$

La probabilité que $Y = y_j$, $j = 1, ..., n$ est donnée par

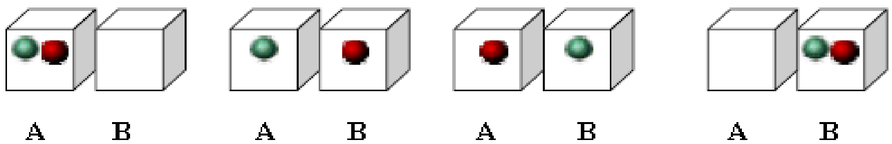
$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = p_{\bullet j}$$

Les $p_{i\bullet}$ et $p_{\bullet j}$, $(i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n)$ constituent les lois de probabilité pour les v.a X et Y. Elles sont dites lois marginales de v.a X et Y respectivement.

Remarque: Il est clair que l'on a

$$\sum_{i=1}^{m} p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Exemple: Dans l'exemple précédant, on a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et



En effet, p_{11} correspond à $X = 0$ et $Y = 0$, c'est à dire que le nombre de boules dans la boite A est nulle et le nombre de boites vides est nulle; impossible, alors $p_{11} = 0$.
p_{12} correspond à $X = 0$ et $Y = 1$, alors $p_{12} = \frac{1}{4}$ ...de la même façon

$X \backslash Y$	0	1	$\sum$
0	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$p_{1\bullet} = \frac{1}{4}$
1	$\frac{2}{4}$	$\frac{0}{4}$	$p_{2\bullet} = \frac{1}{2}$
2	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$p_{3\bullet} = \frac{1}{4}$
$\sum$	$p_{\bullet 1} = \frac{1}{2}$	$p_{\bullet 2} = \frac{1}{2}$	$p_{ij} = 1$

donc

X	0	1	2
$p_{i\bullet}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

et

Y	0	1
$p_{1\bullet}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

et $E(X) = 1$, $E(Y) = \frac{1}{2}$.

a.2. Loi conditionnelle d'un couple de v.a

Définition : La conditionnelle de Y si $Y = y_j$ est définie par

$$P_{Y=y_j}(X = x_i) = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_i)}{P(Y = y_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

avec $p_{\bullet j} \neq 0$, $\forall j = 1, ..., n$.
De même

$$P_{X=x_i}(Y = y_j) = P(Y = y_j | X = x_{ij}) = \frac{P(Y = y_i, X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

avec $p_{i\bullet} \neq 0$, $\forall i = 1, ..., m$.

a.3. Variables aléatoires indépendantes

Définition : Les deux v.a X et Y sont dites indépendantes ssi pour tout couple (i, j), on a

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}, \qquad i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n.$$

Définition : Si l'espérance mathématique de la v.a XY existe, alors

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j p_{ij}.$$

Remarque: Si X et Y sont indépendantes, alors

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_{i\bullet} \sum_{j=1}^{n} y_j p_{\bullet j} = E(X) E(Y).$$

La réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple: Dans l'exemple précédant, on pose $Z(\Omega) = XY(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et soient l'évènement $U = \{XY = 0\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (2,0)\}$, alors $P(U) = \frac{3}{4}$, l'évènement $V = \{XY = 1\} = \{(1, 1)\}$, alors $P(V) = \frac{0}{4}$, l'évènement $W = \{XY = 2\} = \{(2, 1)\}$, alors $P(W) = \frac{1}{4}$, donc

z_i	0	1	2	$\sum$
p_{z_i}	$\frac{3}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
$z_i p_{z_i}$	0	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$

alors $E(XY) = E(X) E(Y) = \frac{1}{2}$, mais X et Y ne sont pas indépendantes, puisque par exemple on a: $p_{11} = 0$, $p_{1\bullet} = \frac{1}{4}$ et $p_{\bullet 1} = \frac{1}{2}$ alors $p_{11} \neq p_{1\bullet} \times p_{\bullet 1}$.

b. Cas continus

Définition : Un couple de v.a $Z = (X, Y)$ est dit absolument continu s'il existe une application $f(x, y)$ vérifiée les propriétés

i) $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dxdy = 1$.

Remarque:

1. La probabilité que le point $(X \ , Y)$ se trouve dans le domaine $\triangle$ est

$$P[(X, Y) \in \triangle] = \iint_{\triangle} f(x, y)\, dxdy.$$

2. En particulier, si $\triangle = [a, b] \times [c, d]$

$$P[(X, Y) \in \triangle] = P[(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)] = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx.$$

b.1. Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition du couple de v.a $Z = (X, Y)$ est définie par

$$F_Z(x, y) = P[(X \leq x, Y \leq y)] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, dv du.$$

Remarque:

1. On a: $f_Z(x, y) = \dfrac{\partial^{2 F_Z(x,y)}}{\partial x \partial y}$.

2. Les fonctions

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)\, dv du = \lim_{y \to +\infty} F_Z(x, y)$$
$$\text{et } F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)\, du dv = \lim_{x \to +\infty} F_Z(x, y)$$

   sont les fonctions de répartitions marginales des v.a X et Y.

3. Les fonctions

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v)\, dv \qquad et \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\, du$$

   sont les fonctions de densités marginales des v.a X et Y, avec $f_X(x) = F'_X(x)$ et $f_Y(y) = F'_Y(y)$.

Exemple : Soient $c \in \mathbb{R}$, f la fonction définie par

$$f(x, y) = cxye^{-x^2 - y^2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}_+$$

1. Déterminer c pour que f soit la fonction de densité d'un couple aléatoire (X, Y).
2. Calculer $F_{(X,Y)}$ la fonction de répartition du couple (X, Y).
3. En déduire les fonctions de répartitions marginales.
4. Calculer les fonctions de densité marginale.

Solution:

1. La fonction f doit être positive, ainsi $c \geq 0$, de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx dy = 1$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx dy = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} cxye^{-x^2 - y^2} dx dy = \frac{c}{4} = 1 \Longleftrightarrow c = 4.$$

2. Fonction de répartition du couple (X, Y).

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, dv du.$$

Si x ou $y \in]-\infty, 0[$ alors $F_{(X,Y)}(x, y) = 0$.
Si x et $y \in [0, +\infty[$ alors

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} 4uve^{-u^2-v^2} dv du = 4 \int_{0}^{x} ue^{-u^2} du \int_{0}^{y} ve^{-v^2} dv \\ &= \left(1 - e^{-x^2}\right)\left(1 - e^{-y^2}\right). \end{aligned}$$

3. Fonctions de répartitions marginales: si x et $y \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = \lim_{y \to +\infty} \left(1 - e^{-x^2}\right)\left(1 - e^{-y^2}\right) = \left(1 - e^{-x^2}\right) \\ \text{et } F_Y(y) &= \lim_{x \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-x^2}\right)\left(1 - e^{-y^2}\right) = \left(1 - e^{-y^2}\right) \end{aligned}$$

4. Fonctions de densité marginale si x et $y \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F_X'(x) = 2xe^{-x^2} 1_{\mathbb{R}_+}(x) \\ \text{et } f_Y(y) &= F_Y'(y) = 2ye^{-y^2} 1_{\mathbb{R}_+}(y). \end{aligned}$$

b.2. Loi conditionnelle

Définition : Soit $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire absolument continu, f_Z sa fonction de densité.

a) La loi conditionnelle de X sachant Y est donnée par :

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_Z(x, y)}{f_Y(y)}, \quad \text{avec} \quad f_Y(y) \neq 0.$$

b) La loi conditionnelle de Y sachant X est donnée par :

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_Z(x, y)}{f_X(x)}, \quad \text{avec} \quad f_X(x) \neq 0.$$

Définition : Soit (X, Y) un couple aléatoire absolument continu.

a) L'espérance conditionnelle de X sachant Y est donnée par :

$$E(X | Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=y}(x)\, dx.$$

b) L'espérance conditionnelle de Y sachant X est donnée par :

$$E(Y | X = x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X=x}(y)\, dy.$$

b.3. Variables aléatoires indépendantes

Définition : Les deux v.a X, Y sont dites indépendantes ssi

$$\begin{aligned}
&P\left[(X \leq x, Y \leq y)\right] = P\left(X \leq x\right) P\left(Y \leq y\right), \qquad \text{ou} \\
&F_{(X,Y)}\left(x, y\right) = F_X\left(x\right) F_Y\left(y\right), \qquad \text{ou} \\
&f_{(X,Y)}\left(x, y\right) = f_X\left(x\right) f_Y\left(y\right).
\end{aligned}$$

Remarque:

1. Si l'espérance de la v.a XY existe, alors

$$E\left(XY\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uvf_{(X,Y)}\left(u, v\right) dvdu.$$

2. Si X et Y sont indépendants, alors

$$E\left(XY\right) = E\left(X\right) E\left(Y\right),$$

   mais la réciproque est fausse comme dans le cas discrèt.

3. Vecteurs aléatoires

a. Loi d'un vecteur aléatoire

Nous avons défini les vecteurs aléatoires à n dimensions comme un $n-$uplet variables réelles $X = (X_1, \ldots, X_n)$.
Définition : La loi du vecteur X est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa tribu Borélienne $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$. Elle est notée P_X et se définit par:

$$\forall B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right); \qquad P_X\left(B\right) = P\left(X \in B\right).$$

Remarque:

1. Si le vecteur X admet une densité notée f, la loi jointe s'écrit

$$P\left(X \in B\right) = \int_B f\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_n$$

   f est une fonction positive définie sur $\mathbb{R}^n$ et d'intégrale égale a 1.

2. La loi marginale de X_i, $\left(i = \overline{1, n}\right)$ est alors la loi de densité

$$f_{X_i}\left(x_i\right) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n.$$

3. La fonction de répartition

$$\forall \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n: \qquad F_X\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f\left(y_1, \ldots, y_n\right) dy_n \ldots dy_1.$$

Définition :

1. L'espérance du vecteur X sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par:

$$E(X) = (E(X_1), \ldots E(X_n)).$$

2. Pour une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mesurable telle que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n < \infty$$

on déduit:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

b. Matrice de covariance

Définition : On appelle matrice de covariance du vecteur X, la matrice carré K_X de taille n dont les coefficients sont donnée par (s'ils existes)

$$\forall i, j = 1, ..., n; \qquad k_{ij} = Cov(X_i, X_j)$$

où

$$Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))] = E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j).$$

$Cov(X_i, X_j)$ s'appelle covariance des variables X_i, X_j. K_X est une matrice symétrique semi-définie positive.

Remarque:

1. Pour un couple de variables aléatoires réelles (X, Y), nous avons

$$K_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}.$$

2. Le nombre réel r défini par

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \qquad \text{où } \sigma_X^2 = Var(X) \text{ et } \sigma_Y^2 = Var(Y)$$

est dit coefficient de corrélation de X et Y.

Propriétés:

1. Symétrique: $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.

   En effet

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(YX) - E(Y)E(X).$$

2. Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, la Cov est bilinéaire:

$$\begin{aligned} Cov\left(aX_1 + bX_2, cY_1 + dY_2\right) &= aCov\left(X_1, cY_1 + dY_2\right) + bCov\left(X_2, cY_1 + dY_2\right) \\ &= acCov\left(X_1, Y_1\right) + adCov\left(X_1, Y_2\right) \\ &\quad + bcCov\left(X_2, Y_1\right) + bdCov\left(X_2, Y_2\right). \end{aligned}$$

3. Si X et Y sont indépendantes, alors $Cov\left(X, Y\right) = 0$.

4. $Var\left(aX + bY\right) = a^2 Var\left(X\right) + 2abCov\left(X, Y\right) + b^2 Var\left(Y\right)$.

5. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\left|Cov\left(X, Y\right)\right| \leq \sqrt{Var\left(X\right)}\sqrt{Var\left(Y\right)} = \sigma_X \sigma_Y,$$

alors $-1 \leq r \leq 1$.
En effet: $\forall \lambda \in \mathbb{R}; Var\left(\lambda X + Y\right) \geq 0$, alors

$$\mathcal{P}\left(\lambda\right) = \lambda^2 Var\left(X\right) + 2\lambda Cov\left(X, Y\right) + Var\left(Y\right) \geq 0$$

où $\mathcal{P}\left(\lambda\right)$ est un polynôme de degré 2 par rapport à λ, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(\lambda\right) &\geq 0 \Leftrightarrow \left(Cov\left(X, Y\right)\right)^2 - Var\left(X\right) Var\left(Y\right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(Cov\left(X, Y\right)\right)^2 \leq Var\left(X\right) Var\left(Y\right). \end{aligned}$$

Exemple: Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}\left(0, 1\right)$. Notons

$$\left\{ \begin{array}{l} X = U + V \\ Y = U - V \end{array} \right. .$$

On cherche à calculer la matrice de covariance du couple $\left(X, Y\right)$.

Solution : On a

$$K_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} Var\left(X\right) & Cov\left(X, Y\right) \\ Cov\left(X, Y\right) & Var\left(Y\right) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Var\left(X\right) &= Var\left(U + V\right) = Var\left(U\right) + 2Cov\left(U, V\right) + Var\left(V\right) = \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \\ Var\left(X\right) &= Var\left(U - V\right) = Var\left(U\right) - 2Cov\left(U, V\right) + Var\left(V\right) = \frac{1}{12} - 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \\ Cov\left(X, Y\right) &= Cov\left(U + V, U - V\right) = Var\left(U\right) - Var\left(V\right) + Cov\left(U, V\right) - Cov\left(U, V\right) = 0 \end{aligned}$$

donc la matrice de covariance du couple $\left(X, Y\right)$

$$K_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \neq 0$$

les v.a X et Y ne sont pas indépendantes.

Remarque:

1. Si les v.a $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, la matrice K_X est diagonale.
2. En notation matricielle, la matrice de covariance d'un vecteur X est égal à
$$K_X = E\left[(X - E(X)) \quad {}^T(X - E(X))\right].$$

Proposition: Soit X un vecteur aléatoire de dimension n. Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors:
$$K_{AX} = AK_X\ {}^T A \qquad \left({}^T A \text{ transposé de } A\right).$$

Démonstration: Nous avons

$$\begin{aligned} K_{AX} &= E\left[(AX - E(AX)) \quad {}^T(AX - E(AX))\right] = E\left[A(X - E(X)) \quad {}^T\left(X - E(X)\ {}^T A\right)\right] \\ &= AE\left[(X - E(X)) \quad {}^T(X - E(X))\right]\ {}^T A. \end{aligned}$$

Exemple: Il est possible de retrouver le résultat de l'exemple précédent de manière directe. En effet, nous avons
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$
Ainsi

$$\begin{aligned} K_{(X,Y)} &= K_{A(U,V)} = AK_{(U,V)}\ {}^T A, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ K_{(X,Y)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c. Changement de variables

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de densité f_X. On appellera support de f_X le domaine D, supposé ouvert, défini par

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n, f_X(x) > 0\}.$$

Soient $Z = \varphi(X)$ avec φ est définie sur le domaine, bijective sur son image $\triangle = \varphi(D)$ et supposons que φ et φ^{-1} sont de classe C^1 sur D et $\triangle$ resp. Considérons le déterminant

$$Jac(\varphi)(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Proposition: La densité du vecteur aléatoire Z est donnée par:

$$\forall z \in \varphi(D): \qquad f_Z(z) = \left|Jac\left(\varphi^{-1}\right)(z)\right| f_X\left(\varphi^{-1}(z)\right).$$

Exemple: Soient X_1, X_2, X_3 trois variables indépendantes de loi $\mathcal{U}(0,1)$. On cherche a déterminer la loi du triplet (Z_1, Z_2, Z_3) défini par les relations

$$Z_1 = -\ln X_1, \qquad Z_2 = -X_2 \ln X_1, \qquad Z_3 = -X_2 \ln X_3.$$

Solution: L'image du domaine $D = (0,1)^3$ est égale à

$$\triangle = \{(z_1, z_2, z_3)\,; 0 < z_2 < z_1, 0 < z_3\}$$

et nous avons

$$x_1 = \exp(-z_1), \qquad x_2 = \frac{z_2}{z_1}, \qquad x_3 = x_1 = \exp\left(-\frac{z_3 z_1}{z_2}\right).$$

Le Jacobien du changement de variables est donné par

$$\begin{vmatrix} -\exp(-z_1) & 0 & 0 \\ -\frac{z_2}{z_1^2} & \frac{1}{z_1} & 0 \\ \cdots & \cdots & -\frac{z_1}{z_2}\exp\left(-\frac{z_3 z_1}{z_2}\right) \end{vmatrix} = \frac{\exp\left[-z_1\left(1+\frac{z_3}{z_2}\right)\right]}{z_2}$$

finalement, nous obtenons

$$f(z_1, z_2, z_3) = \frac{\exp\left[-z_1\left(1+\frac{z_3}{z_2}\right)\right]}{z_2} 1_{\triangle}(z_1, z_2, z_3).$$

d. Fonctions caractéristiques

Définition: On appelle fonction caractéristique du vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$ la fonction à valeurs complexes définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \qquad \varphi_X(t) = E\left[\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k\right)\right].$$

Lorsque le vecteur X admet une densité :

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \qquad \varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k\right) f_X(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Proposition: Deux vecteurs X et Y ont même loi si et seulement si $\varphi_X = \varphi_Y$.

4. Vecteurs gaussiens

a. Caractérisation des vecteurs gaussiens

Définition: On dit que $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur aléatoire gaussien si toute combinaison linéaire à coefficients réels des X_i suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Remarque: Un vecteur dont toutes les coordonnées sont gaussiennes n'est pas nécessairement gaussien.

Proposition: Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors le vecteur $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien.

Démonstration: Soit $a_1, \ldots, a_n$ des scalaires et $Y = \sum_{k=1}^n a_k X_k$. La fonction caractéristique de Y est

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= E\left[\exp(itY)\right] = E\left[\exp\left(it\sum_{k=1}^n a_k X_k\right)\right] = \prod_{k=1}^n E\left[\exp(ita_k X_k)\right] \\
&= \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(a_k t) = \prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{a_k^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2\right).
\end{aligned}$$

La variable Y suit donc la loi $\mathcal{N}\left(0, \sum_{k=1}^n a_k^2\right)$.

Proposition: Soit X un vecteur gaussien, d'espérance $m \in \mathbb{R}^n$ et de matrice de covariance K_X. La fonction caractéristique de X est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \qquad \varphi_X(t) = \exp\left(i\ {}^T t m - \frac{1}{2}\ {}^T t K t\right).$$

b. Propriétés des vecteurs gaussiens

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur gaussien et K sa matrice de covariance. Les variables X_k sont indépendantes si et seulement la matrice K est diagonale.

2. Soit $m \in \mathbb{R}^n$ et K une matrice symétrique d'ordre n, définie positive ($\det K \neq 0$). La loi normale $\mathcal{N}(m, K)$ admet pour densité

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \qquad f_X(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\frac{1}{\sqrt{\det K}}\exp\left(-\frac{1}{2}\ {}^T(x-m)K^{-1}(x-m)\right).$$

5. Convergence dans le cas vectoriel

Théorème: Soit une suite du vecteurs aléatoires $X_n : (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n) \to \left(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$ et un autre vecteur aléatoire $X : (\Omega_\infty, \mathcal{F}_\infty, P_\infty) \to \left(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$. Alors les propriétés (a) et (b) suivantes sont équivalentes:

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}^k$, $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$, quand $n \to \infty$.

(b) Pour tout point de continuité $x \in \mathbb{R}^k$, $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$, quand $n \to \infty$.

Définition: Si l'un de deux points (a) ou (b) dans le théorème précédant a lieu, alors nous disons que X_n converge vaguement vers X, ou X_n converge en distribution vers X, ou X_n converge en loi vers X, notée:

$$X_n \rightsquigarrow X \quad \text{ou} \quad X_n \underset{d}{\to} X \quad \text{ou} \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

6. Théorème central limite vectoriel

Théorème: Soient $X_1, \ldots, X_d$ des vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^n$ i.i.d admettant un moment d'ordre 2. On note m leur espérance et K leur matrice de covariance. Alors

$$\sqrt{d}\left(\overline{X}_d - m\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, K\right).$$

Preuve: On calcule, pour tout d la fonction caractéristique de $Z_d = \sqrt{d}\left(\overline{X}_d - m\right)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \qquad \varphi_{Z_d}\left(t\right) = E\left[\exp\left(i\ {}^T t Z_d\right)\right]$$

on a par le théorème central limite que ${}^T t Z_d \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, {}^T tKt\right)$

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \qquad \varphi_{Z_d}\left(t\right) \underset{d \to \infty}{\to} \exp\left(-\frac{1}{2}\ {}^T tKt\right).$$