بسم الله الرحمن الرحيم

اهلا وسهلا بكم

قناة

أ.د/ خليفي عيسى

PR: KHELIFI AISSA CHANNEL

استاذ الاقتصاد الجزئي

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير- جامعة محمد خيضر بسكرة

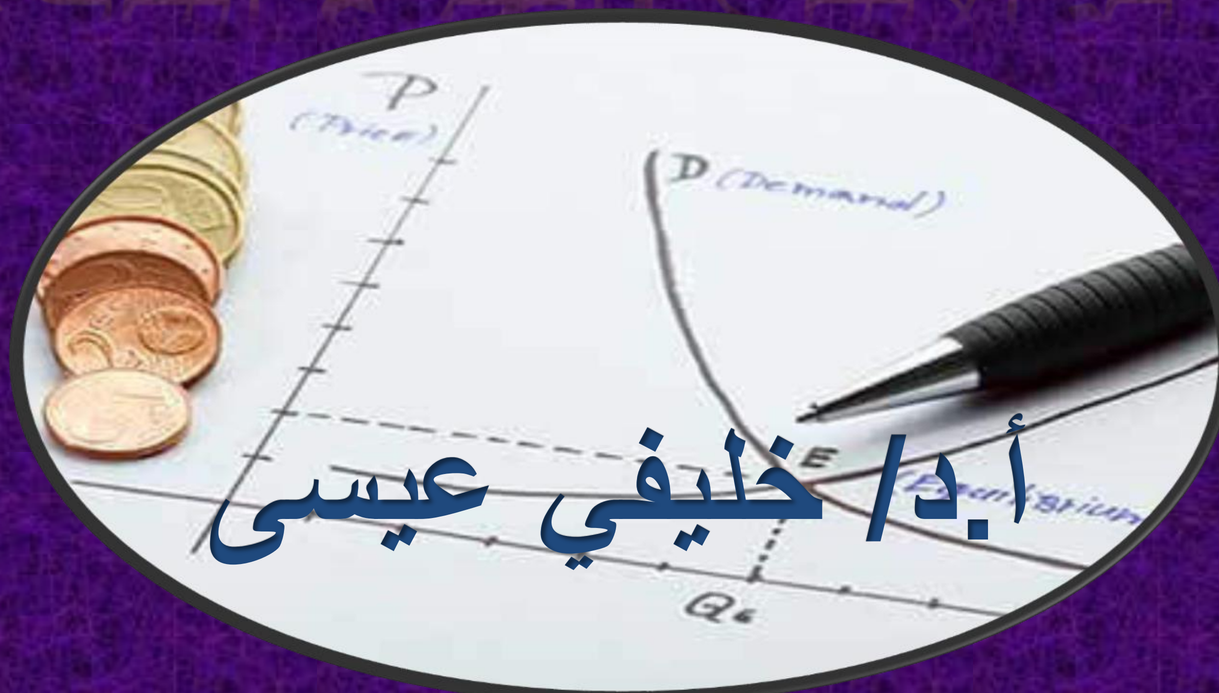
إشترك
في قناتنا على

نظرية الإنتاج (الجزء الثاني)

جامعة محمد خيضر- بسكرة-

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

نظرية الإنتاج (الجزء الثاني)



أ.د/ خليفي عيسى

❖ دالة إنتاج الفترة الطويلة.

- ❑ المعدل الحدي للإحلال التقني.
- ❑ منحنى التكلفة المتساوية.
- ❑ توازن المنتج.
- ❑ مسار التوسع.
- ❑ مرونة الإنتاج.
- ❑ غلة الحجم.
- ❑ تجانس دالة الإنتاج.
- ❑ دالة الإنتاج كوب دوغلاس.

❑ تمهيد:

في هاته الحالة يستطيع المنظم أن يستعمل عاملين إنتاجين متغيرين، وبما أنه يستطيع أن يغير عوامل الإنتاج كلها، فمعنى ذلك أن دالة الإنتاج المعبرة عن ذلك هي دالة الإنتاج للفترة طويلة، لأن المنتج لا يستطيع تغيير كل عوامل الإنتاج إلا في الفترة الطويلة.

وتكون دالة الإنتاج في هاته الفترة عبارة على: $Q = f(L, K)$

حيث L هو العمل، و K هو رأس المال.

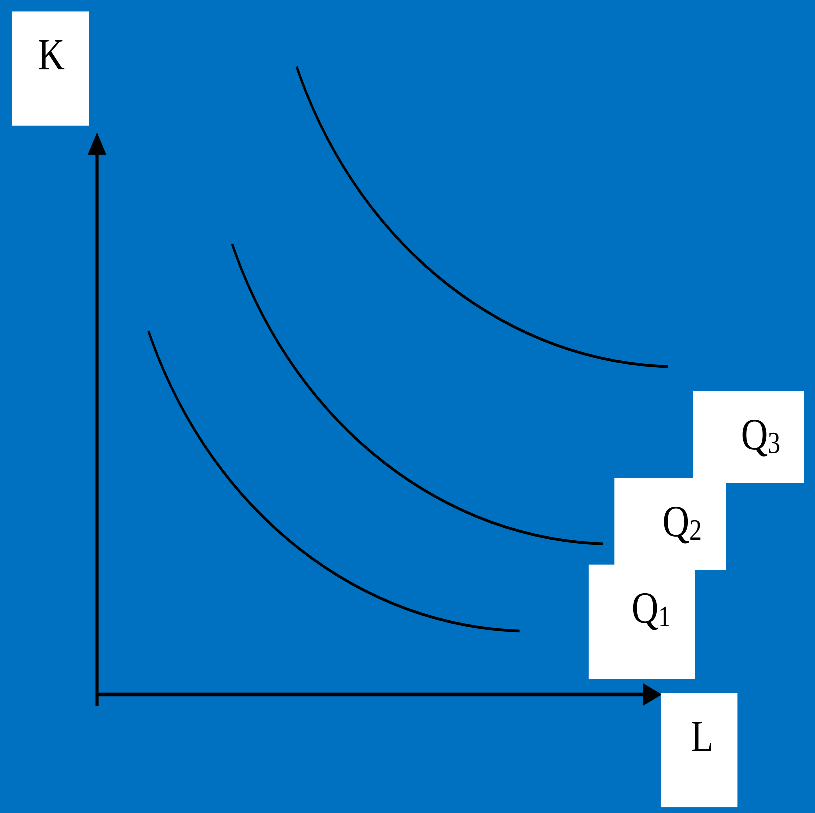
وكلاهما يستخدم بمقادير متغيرة، ويمكن التعبير بيانيا على هذه الدالة بما يسمى بمنحنى الناتج المتساوي.

1- تعريف منحنى الناتج المتساوي:

تبين منحنيات الناتج المتساوي التوافيق أو التوليفات المختلفة من عوامل الإنتاج (العمل، رأس المال) التي تنتج نفس المقادير من الإنتاج(أو لها نفس حجم الإنتاج).

و المنتج ليس له منحنى ناتج متساوي واحد و إنما مجموعة من منحنيات الناتج المتساوي و التي تسمى خريطة أو شبكة منحنيات الناتج المتساوي.

☐ شكل منحنيات الناتج المتساوي:



2- خصائص منحنيات الناتج المتساوي:

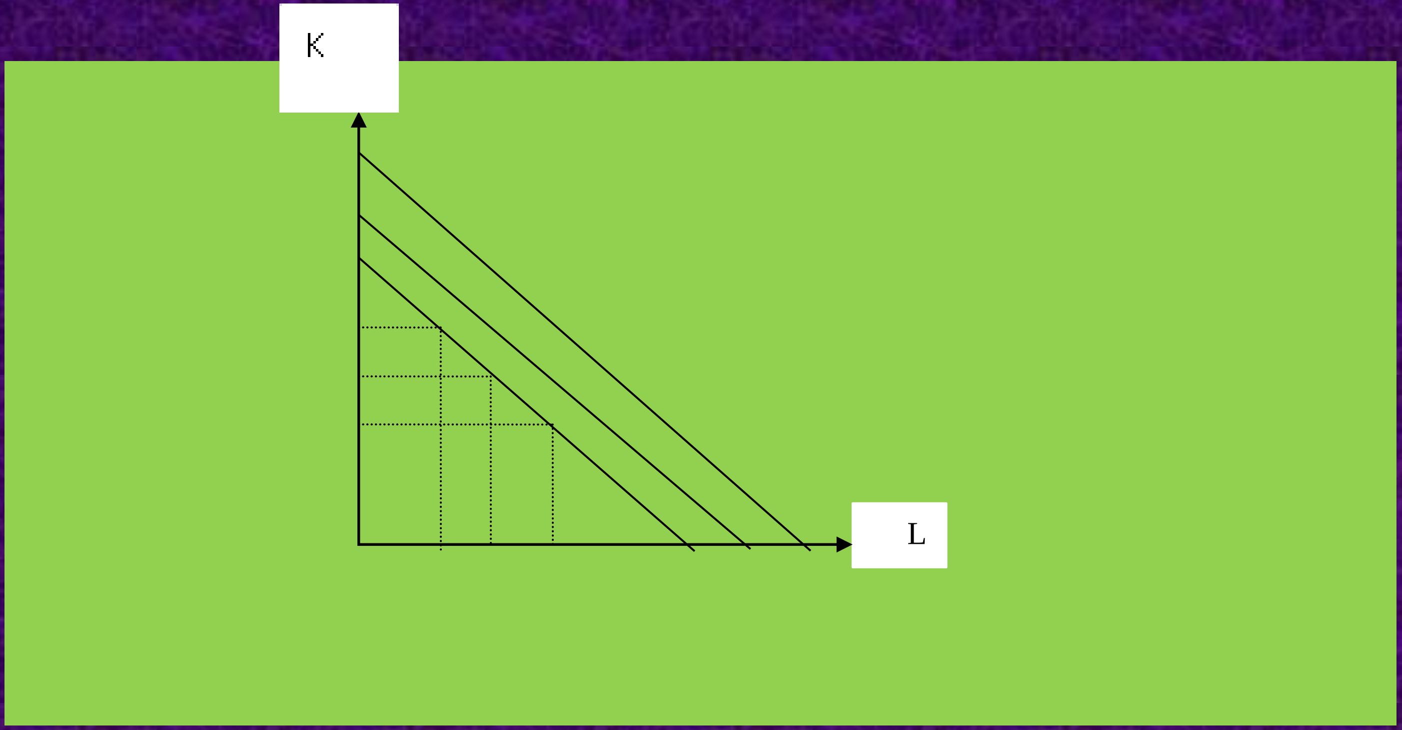
منحنيات الناتج المتساوي لها نفس خصائص منحنيات السواء و المتمثلة في:

- ➢ ميل منحنيات الناتج المتساوي سالب, فهو بالتالي يعكس ظاهرة الإحلال وهذا في المدى الملائم أو في المنطقة الاقتصادية الإنتاج.
- ➢ محدبة باتجاه نقطة الأصل, وهي الحالة الوحيدة التي يكون فيها المعدل الحدي للإحلال التقني متناقصا.
- ➢ منحنيات الناتج المتساوي لا تتقاطع أبدا, حتى تكون كل نقطة تقع على منحنى أعلى أفضل من أي نقطة تقع على منحنى أسفل, وهو مالا يتحقق في حالة التقاطع.

3- حالات استثنائية لمنحنيات الناتج المتساوي:

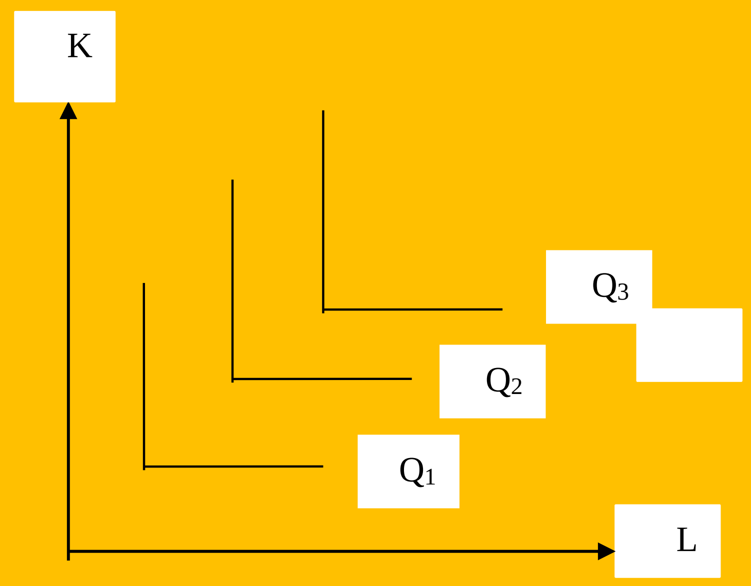
منحنيات الناتج المتساوي يمكن أن تأخذ أشكالا أخرى هي:

- منحنيات الناتج المتساوي في حالة L وK متكاملتان تماما:



3- حالات استثنائية لمنحنيات الناتج المتساوي:

- منحنيات الناتج المتساوي فى حالة L و Kبديلتان تماما:

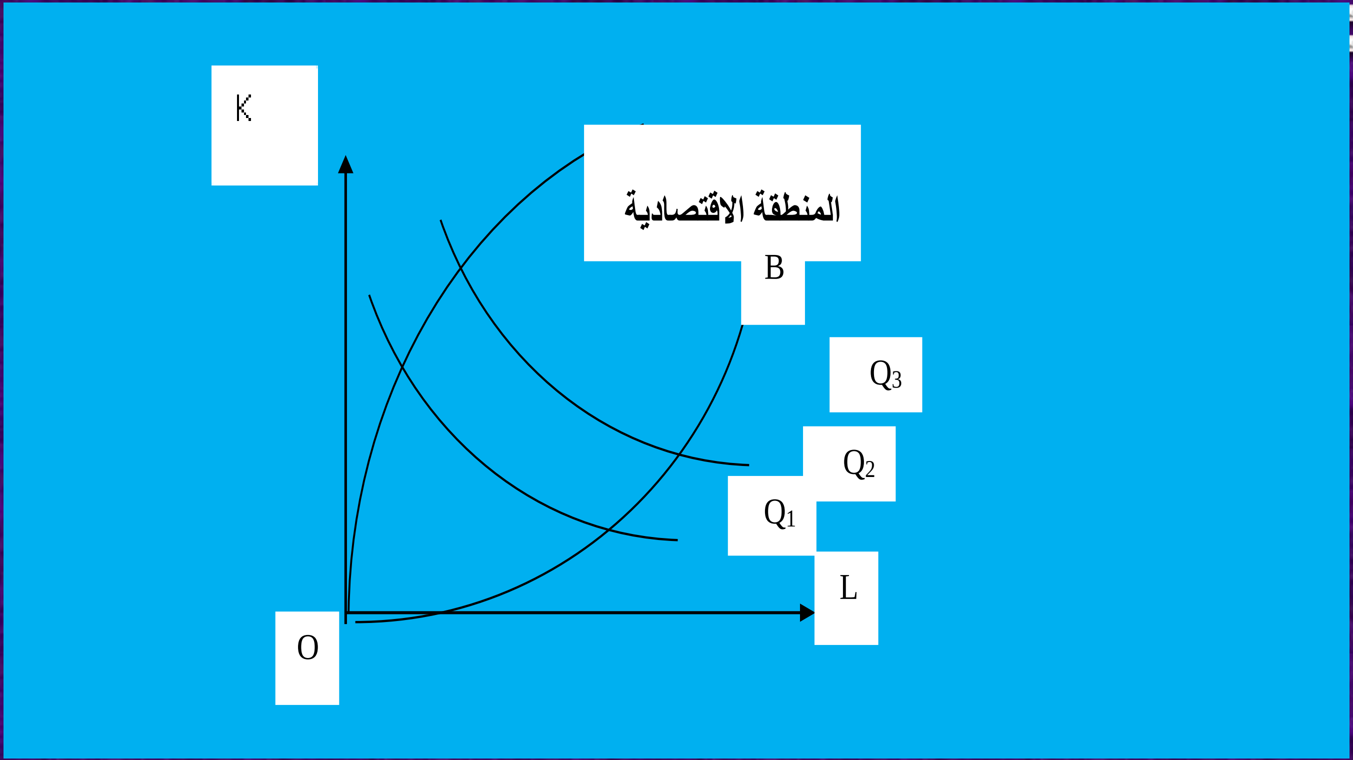


4- تعيين المدى الملائم أو المنطقة الاقتصادية للإنتاج:

في الحقيقة ليست كل النقاط الموجودة على نفس منحنى الناتج المتساوي تعبر عن نقاط المنطقة الاقتصادية أو النقاط الاقتصادية ، بالرغم من أنها تعطي لنا نفس المستوى من الإنتاج، و السبب في ذلك أن هناك نقاط تتطلب استعمال كميات أكبر من رأس المال والعمل للحصول على مستوى الإنتاج نفسه ، وبالتالي ليس من المعقول أن نختار مثل هاته النقاط , وعليه فإن المدى أو المنطقة الاقتصادية الإنتاج هي تلك المنطقة التي يكون فيها المعدل الحدي للإحلال التقني بين عوامل الإنتاج سالبا، أي تكون هناك إمكانية الإحلال بين عوامل الإنتاج، ويمكن فصل المنطقة الاقتصادية من المنطقة غير الاقتصادية بخطوط تسمى : خطوط الحدود.

4- تعيين المدى الملائم أو المنطقة الاقتصادية للإنتاج:

وتمر خطوط الحدود بكل نقاط الانعطاف الموجودة على كل المنحنيات الناتج المتساوي حيث إلى خارج هذه الخطوط يكون المعدل الحدي للإحلال التقني موجبا, و إلى داخلها سالبا، و هو ما يمثله الشكل التالي:



❖ خصائص المنطقة الاقتصادية:

تتميز المنطقة الاقتصادية للإنتاج في الفترة الطويلة بالخصائص التالية:

- داخل هذه المنطقة يكون المعدل الإحلال التقني سالبا ، وهذا دليل على أن ميل كل نقطة داخل هاته المنطقة هو ميل سالب.
- قابلية الإحلال بين عوامل الإنتاج.
- الإنتاجية الحدية موجبة داخل هذه المنطقة.

5- المعدل الحدي للإحلال التقني أو الفني TMST :

المعدل الحدي للإحلال التقني TMST يقيس مدى الانخفاض في عنصر إنتاجي عند ما يزداد العنصر الآخر بوحدة واحدة, بينما يبقى مستوى الإنتاج ثابت. .بمعنى أن المعدل الحدي لإحلال التقني للعامل L محل K مقدار الكمية التي ينبغي أن يتخلى عليها المنتج من K لزيادة استخدام العامل L بوحدة واحدة، مع البقاء على نفس مستوى الإنتاج (نفس منحنى الناتج المتساوي).

- ✓ و يحسب بالشكل التالي:

$$TMS_{T_{(L,K)}} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \frac{-\delta K}{\delta L}$$

مثال تطبيقي:

لدينا الجدول التالي به ثلاث منحنيات ناتج متساوي، احسب المعدل الحدي للإحلال التقني عند كل منحنى من المنحنيات الثلاثة:

I			II			III		
L	K	$TMST_{L,K}$	L	K	$TMST_{L,K}$	L	K	$TMST_{L,K}$
3	14	-	4	14	-	5.5	15	-
2	10	-4	3	11	-3	5	12	-6
3	6	4	4	8	3	5.5	9	6
4	4.5	1.5	5	6.3	1.7	6	8.3	1.4
5	3.5	1	6	5	1.3	7	7	1.3
6	3	0.5	7	4.4	0.6	8	6	1
7	2.7	0.3	8	4	0.4	9	5.6	0.4
8	3	-0.3	9	4.4	-0.4	10	6	-0.4

6- منحنى التكلفة المتساوي:

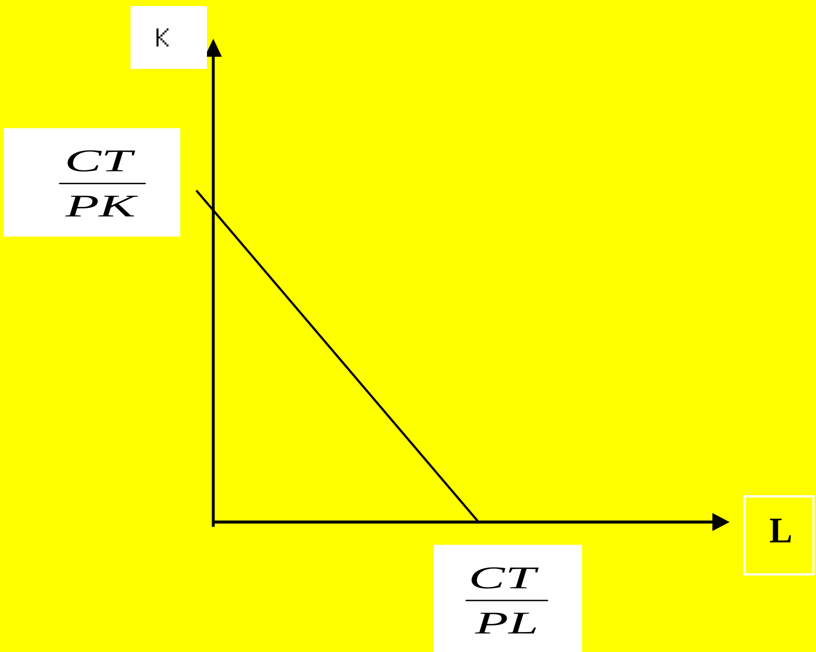
عندما يقرر المنظم القيام بالعملية الإنتاجية, فإنه يبدأ بتخصيص الميزانية اللازمة لذلك، أي مقدار ما يمكن إنفاقه للحصول على عوامل الإنتاج، حينئذ يجب أن لا يتجاوز الإنفاق على عوامل الإنتاج هذه الميزانية.

و الإنفاق الكلي على عوامل الإنتاج هو مجموع الإنفاق على عنصر العمل(أي مقدار الكمية المستعملة من العمل مضروبا في سعر الوحدة منه)، و الإنفاق على عنصر رأس المال(مقدار الكمية المستعملة من رأس المال مضروبا في سعر الوحدة منه).

فإذا رمزنا للإنفاق الكلي بالرمز: CT ، و عنصر رأس المال بالرمزK وعنصر العمل بالرمزL ، حيث سعر رأس المال هو:PK ، وسعر العمل هو:PL . فإننا نحصل على معادلة التكلفة من الشكل: $CT = L.P_L + K.P_K$

❖ التمثيل البياني لمنحنى التكلفة المتساوي:

التمثيل البياني و الهندسي لمعادلة التكلفة يسمى **منحنى التكلفة المتساوي**، و الذي هو عبارة محل هندسي يصور مختلف إمكانيات الإنفاق على عوامل الإنتاج لدى منتج معين، وهو بصفة عامة عبارة عن خط مستقيم ميله سالب وثابت، و يمكن توضيحه بالشكل التالي:



L	K
$\frac{CT}{PL}$	0
0	$\frac{CT}{PK}$

7- توازن المنتج :

يكون المنتج في حالة توازن عندما يميل إلى استخدام و استعمال عوامل الإنتاج بالشكل الذي يسمح له بإنتاج أعظم كمية ممكنة من منتوج، في حدود الميزانية المخصصة له ويمكن إيجاد توازن المنتج بنفس الطرق التي استخدمناها في إيجاد توازن المستهلك.

7-1- إيجاد نقطة التوازن رياضيا:

عندما تتوفر دالة الإنتاج و معادلة الدخل، يمكننا أن نجد الكميات التي يمكن استخدامها من العمل و رأس المال، و التي تجعل هذه الدالة أعظم ما يمكن في حدود ميزانية الإنتاج الممكنة، أو التي تقلل ميزانية الإنتاج في حدود إنتاج معلوم، و قد نجد هذه الكميات باستعمال عدة طرق رياضية نذكر منها:

أـ طريقة شرط التوازن:

كما هو الشأن في نظرية سلوك المستهلك فإنه يمكن إيجاد كميات العمل، ورأس المال التي تحقق أعظم إنتاج ممكن وذلك بالعلاقة التالية:

$$\frac{MP_L}{P_L} = \frac{MP_K}{P_K}$$

$$CT = L.P_L + K.P_K$$

- ✓ ويمكن تعميم هذه القاعدة في حالة استخدام أكثر من عاملين إنتاجين.

ب- طريقة مضاعف لاغرانج:(λ)

1) وضع دالة الهدف:

- دالة الهدف في حالة تعظيم الإنتاج : $Z = \max Q + \lambda(CT - P_L \cdot L - P_K \cdot K)$
- دالة الهدف في حالة تقليل التكلفة: $W = P_L \cdot L + P_K.K + \lambda(Q_0 - Q)$

2) وضع نموذج الحل: - نموذج الحل في حالة التعظيم:

$$\frac{\delta Z}{\delta L} = 0 \Leftrightarrow MP_L - P_L \lambda = 0 \quad \rightarrow 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{MP_L}{P_L} \Leftrightarrow \lambda = \lambda$$

$$\frac{\delta Z}{\delta K} = 0 \Leftrightarrow MP_K - P_K.\lambda = 0 \quad \rightarrow 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{MP_K}{P_K} \Leftrightarrow \frac{MP_L}{P_L} = \frac{MP_K}{P_K}$$

$$\frac{\delta Z}{\delta \lambda} = 0 \Leftrightarrow CT - L.P_L - K.P_K = 0 \quad \rightarrow 3$$

K و L

ب- طريقة مضاعف لاغرانج:(λ)

- نموذج الحل في حالة التقليل:

$$\frac{\delta W}{\delta L}=0 \Leftrightarrow P_L - MP_L\lambda = 0 \quad \rightarrow 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{P_L}{MP_L} \Leftrightarrow \lambda = \lambda$$

$$\frac{\delta W}{\delta K}=0 \Leftrightarrow P_K - MP_K\lambda = 0 \quad \rightarrow 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{P_K}{MP_K} \Leftrightarrow \frac{P_L}{MP_L} = \frac{P_K}{MP_K}$$

$$\frac{\delta W}{\delta \lambda}=0 \Leftrightarrow Q_0 - Q = 0 \quad \rightarrow 3$$

3) <u>حل النموذج</u>:

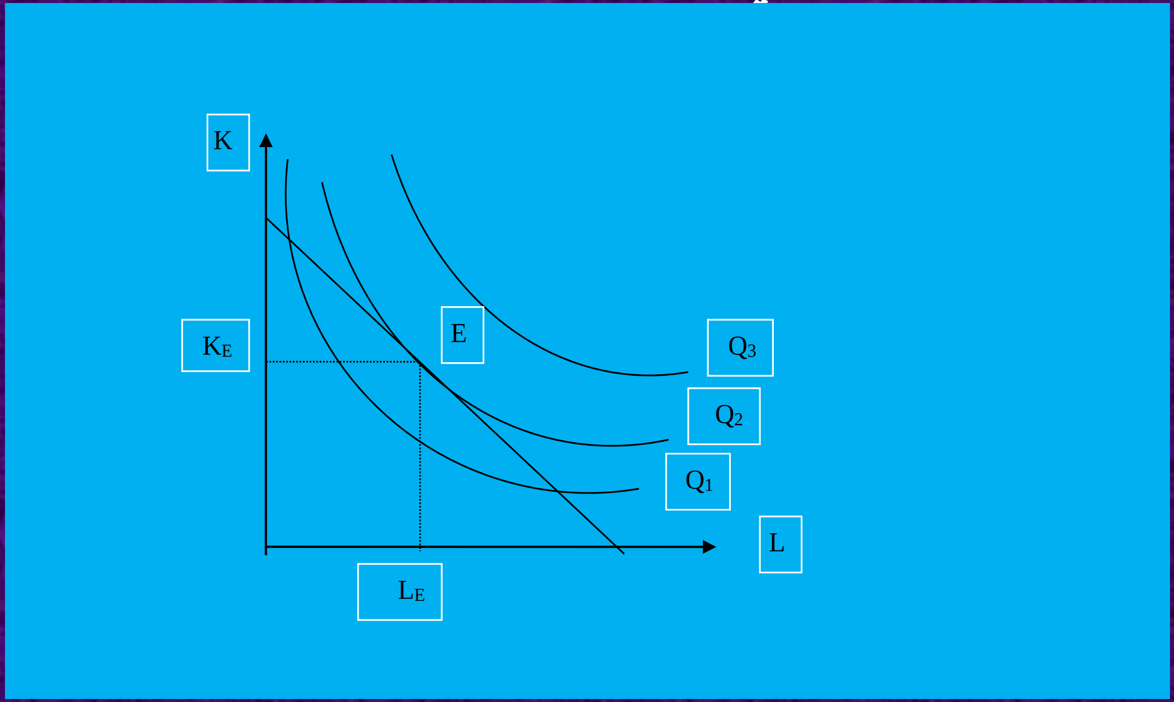
وبحل نموذج التعظيم و التقليل نحصل على الكميات المثلى من L و K.

7-2- إيجاد توازن المنتج هندسيا:

في شبكة المنحنيات الناتج المتساوي يتحدد توازن المنتج عند نقطة التوازن، و هي نقطة التماس بين خط التكلفة المتساوية وأعلى منحنى ناتج متساوي يمكن أن يصله هذا الخط، وتقع هذه النقطة بالضرورة داخل المنطقة الاقتصادية للإنتاج. عند إسقاط هذه النقطة عموديا و أفقيا نحصل على التوليفة المثلى من العمل ورأس المال، أي تلك الكميات المستعملة من هاذين العنصرين المتغيرين (L, K) للحصول على أقصى (أكبر) كمية من الإنتاج في حدود الميزانية المخصصة لذلك.

7-2- إيجاد توازن المنتج هندسيا:

يمكن تمثيل وضع التوازن هندسيا كما يلي:

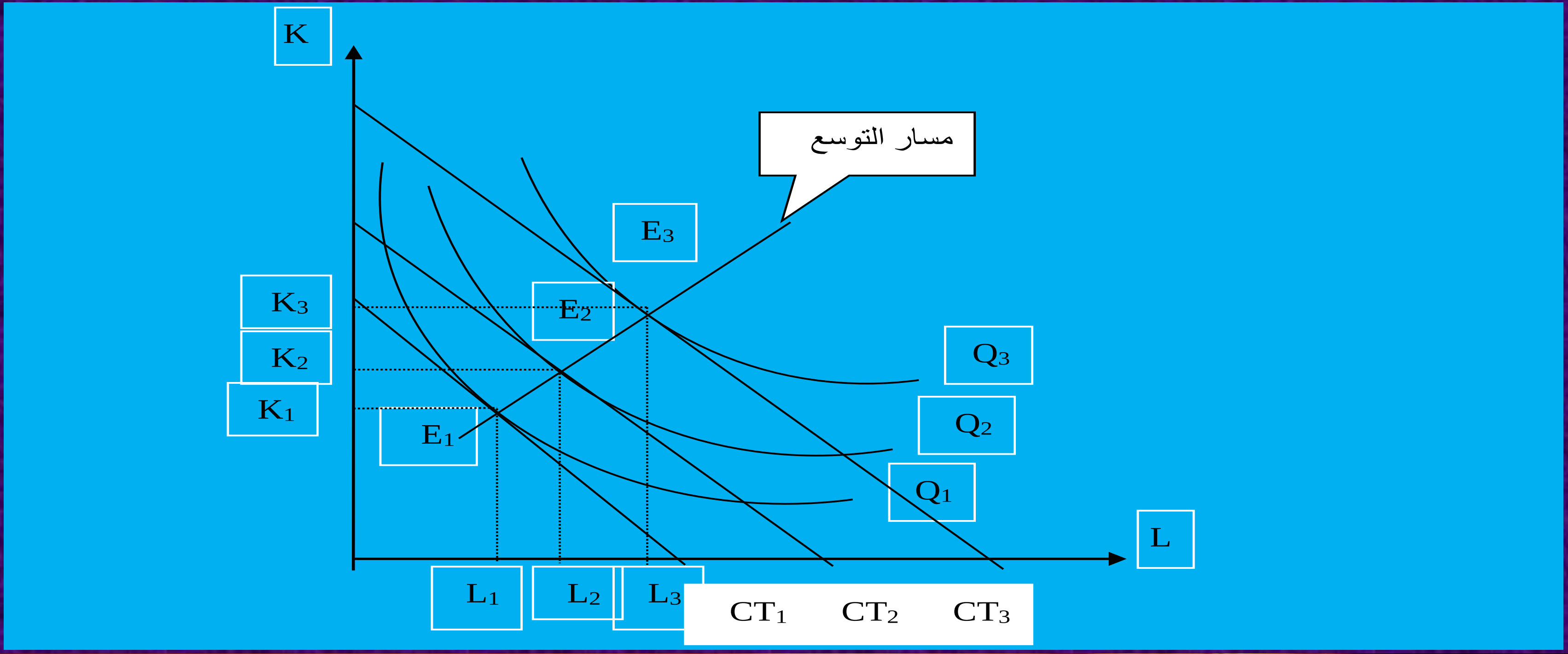


إن الشكل السابق يوضح أن هي نقطة التوازن بالنسبة لهذا المنتج وأن هي الكميات التي يجب استخدامها من العمل ورأس المال للحصول على أقصى وأكبر إنتاج ممكن في حدود الميزانية المخصصة للإنتاج. و يمكن الحصول على توازن المنتج أيضا عندما يتساوى ميل خط التكلفة المتساوية مع ميل منحنى الناتج المتساوي:

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K}$$

8- مسار التوسع هندسيا ورياضيا:

8-1- هندسيا: يعبر مسار التوسع عن المسلك الذي يتبعه المنتج لزيادة قدرته على الإنتاج إذا زاد من ميزانيته (الإنفاق الكلي على الإنتاج)، وبعبارة أخرى هو ذلك المنحنى الذي يصل ما بين نقاط توازن المنتج عندما يتغير الإنفاق الكلي مع ثبات أسعار عوامل الإنتاج، و يمكن توضيح الفكرة من خلال الشكل التالي:



8- شرح مسار التوسع هندسيا :

عند ثبات أسعار عوامل الإنتاج، إذا زاد المنتج من الإنفاق الكلي (زادت ميزانية الإنتاج)،فأن منحنى التكلفة المتساوية ينتقل إلى أعلى وبشكل موازي من الوضعية CT1 إلى CT2، ليمس منحنى الناتج المتساوي Q_2 عند نقطة توازن جديدة E2 هي بالضرورة اكبر من نقطة التوازن E2، وهذا يعني أن المنتج يستطيع إن يحصل على كميات أكبر من K و L وبالتالي يستطيع أن يحصل على كمية أكبر من الإنتاج.

- إذا زاد المنتج مرة أخرى الإنفاق الكلي بالقدر الذي ينقل خط التكلفة المتساوية من CT2 إلى CT3 ليمس منحنى الناتج المتساوي في نقطة توازن جديدة E3 هي بالضرورة اكبر من نقطة التوازن E2، عندما نصل أو نربط بين مختلف نقاط التوازن التي تحدث عندما يغير المنتج الإنفاق الكلي، نحصل على منحنى جديد يسمى: مسار التوسع.

8-2-إيجاد مسار التوسع حسابيا:

إن إيجاد معادلة مسار التوسع رياضيا يتم بعد حل نموذج التعظيم الخاص بالمنتج حيث نحصل على علاقة بين رأس المال والعمل:

$$Q = f(L,K)$$

حيث تمثل كل ثنائية من هاذين العاملين توليفة توازنية عند مستويات مختلفة للإنفاق الكلي.

9- مرونة دالة الإنتاج :

نحتاج في بعض الأحيان إلى معرفة درجة التغير في الإنتاج الكلي عندما يتغير أحد عوامل الإنتاج، وتقاس هذه الظاهرة بمرونة الإنتاج. وعليه يمكن تعريف مرونة الإنتاج بالنسبة لأحد عوامل الإنتاج على أنها: درجة أو نسبة التغير في كمية الإنتاج الكلي عندما يتغير ذلك العامل الإنتاجي بنسبة معينة ويمكن حساب هذه المرونة بواسطة الصيغة التالية:

$$EL = \frac{\frac{\delta Q}{Q}}{\frac{\delta L}{L}} = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \cdot \frac{L}{Q}$$

أ- **مرونة الإنتاج بالنسبة لعنص العمل:**

ب- **مرونة الإنتاج بالنسبة لعنص رأس المال:**

$$EK = \frac{\frac{\delta Q}{Q}}{\frac{\delta K}{K}} = \frac{\Delta Q}{\Delta K} \cdot \frac{K}{Q}$$

ت- **مرونة الإنتاج الكلية:**

$$E = EL + EK$$

10-غلــة الحجم(غلة الإنتـــاج):

تعتمد الفترة الطويلة على إمكانية تغيير كل عوامل الإنتاج مرة واحدة، من هنا تبدأ فكرة غلة الحجم، والتي تعبر عن مقدار الزيادة في الإنتاج الكلي عندما تزداد كل عوامل الإنتاج بنسبة واحدة معينة.

أو بعبارة أخرى هي نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي، مقارنة بنسبة الزيادة في عوامل الإنتاج، و تأخذ ثلاث حالات هي:

أـ <u>غلة الحجم الثابتة:</u> في هذه الحالة عندما تزداد عوامل الإنتاج بنسبة معينة و في نفس الوقت(10 %مثلا) فان الإنتاج الكلي يزداد بنفس الن

سبة (أي 10 %).

$$\left(E = EL + EK = 1\right)$$

✓ غلة الحجم ثابتة هذا يعني أن المرونة الكلية للإنتاج:

10-غلـة الحجم(غلة الإنتــاج):

ب- **غلة الحجم المتزايدة:** تكون دالة الإنتاج في هذه المرحلة عندما تزداد كل عوامل الإنتاج بنسبة معينة (10 %مثلا)، و يؤدي ذلك إلى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة اكبر. (اكبر من 10%).

- ✓ مجموع مرونات دالة الإنتاج بالنسبة للعوامل اكبر من الواحد.

$$E=EL+EK>1$$

ج- **غلة الحجم المتناقصة:** في هذه المرحلة عندما تزداد عوامل الإنتاج بنسبة معينة (10 %مثلا) فان الإنتاج الكلي يزداد بنسبة أقل من ذلك (أقل من 10%).

- ✓ مجموع مرونات دالة الإنتاج بالنسبة للعوامل اقل من الواحد.

$$E=EL+EK<1$$

11- تجانس دالة الإنتاج :

تكون دالة الإنتاج متجانسة في الحالة التي تزيد فيها كل عوامل الإنتاج بنسبة معينة و يسمح لنا ذلك بمعرفة الزيادة في الإنتاج الكلي، و نقول عن دالة الإنتاج أنها متجانسة إذا تحقق ما يلي:

$$Q = f(tL, tK) = t^{\lambda} \cdot Q$$

بحيث λ تمثل درجة تجانس دالة الإنتاج.

- و هنا نميز بين ثلاث حالات هي:

➢ (λ=1) دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى مما يدل على أن غلة الحجم ثابتة.

➢ (λ>1) دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة اكبر من الواحد مما يدل على ان غلة الحجم المتزايدة.

➢ (λ<1) دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة اقل من الواحد مما يدل على أن غلة الحجم المتناقصة.

12- دالة الإنتاج كوب دوغلاس :

هي شكل من أشكال دوال الإنتاج، ونستطيع القول انها دالة رياضية اقتصادية تفسر السلوك الإنتاجي وعلاقته بعوامل الإنتاج. و يمكن أن يستخدم في دراسة عملية الإنتاج على مستوى المؤسسة وفي دراسة عمليات الإنتاج على مستوى الاقتصاد ككل. قام كل من الاقتصادي الأمريكي بول دوغلاس، وعالم الرياضيات ريشارد كوب بطرحها و اختبارها عام 1929. وكان الهدف في البداية هو التحقق فيما إذا كان التحليل الإحصائي يستطيع أن يؤكد وجود قوانين كمية للإنتاجية الحدية وتأثير تلك الإنتاجية في مستوى الإنتاج.

دالة الإنتاج كوب دوغلاس هي من الشكل:

$$Q = f(L,K) = AL^{\alpha} \cdot K^{\beta}$$

حيث : L يمثل عنصر العمل. K: هو عنصر رأس المال. Q :تمثل مستوى الإنتاج. α, β ثوابت تحددها التكنولوجيا. .(A, α, β>0),

دالة كوب دوغلاس دالة متجانسة من الدرجة(α+β) حيث:

$$f(tL,tK)= t^{\alpha+\beta} .Q$$

مثال تطبيقي:

إذا كانت لدينا دالة الإنتاج من الشكل:

-ما هو الشرط الواجب توفره لكي تصبح هاته الدالة، دالة دوغلاس.

- استنتج الدوال الإنتاجية المتوسطة لـ: K و L ، و الإنتاجية الحدية.

- على منحنى من منحنيات الناتج المتساوي، عرف $TMST_{(L,K)}$ (L تحل محل K).

- ما هو حجم الإنتاج الذي تعطيه توليفة $K=200, L=100$ إذا اعتبرنا أن:

T=2 γ=0,2, α =0,4, β=0,4.

- أحسب مرونة كل عنصر من عناصر الإنتاج, و ما هي مرونة الإنتاج الكلية .

- قدر زيادة الإنتاج أو نقصانه المتأتية من زيادة العمل بـ 10% و نقصان حجم رأس المال بـ 5%.

حل المثال التطبيقي:

-1 حتى تكون دالة الانتاج كوب دوغلاس يجب توفر شرط و هو:

$\alpha,\beta,\gamma > 0$

- حيث: $\alpha+\beta+\gamma = 1$ غلة الحجم ثابتة.
- $\alpha+\beta+\gamma > 1$ غلة الحجم متزايدة.
- $\alpha+\beta+\gamma < 1$ غلة الحجم متناقصة.

-2 دوال الإنتاج المتوسطة لـ: L, K

$$MP_L = \frac{1}{2}\alpha . L^{\alpha-1} \cdot K^{B} \cdot T^{\lambda}$$

$$MP_L = \frac{\alpha}{2} \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{B} \cdot T^{\lambda}$$

$$MP_K = \frac{\beta}{2} \cdot L^{\alpha} \cdot K^{B-1} \cdot T^{\lambda}$$

حل المثال التطبيقي:

3- إيجاد TMST:

$$TMST_{(L,K)} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\frac{\alpha}{2}\cdot L^{\alpha-1}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda}}{\frac{\beta}{2}\cdot L^{\alpha}\cdot K^{B-1}\cdot T^{\lambda}} \Leftrightarrow = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{K}{L}$$

$$TMST_{(L,K)} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{K}{L}$$

4- حساب حجم الإنتاج:

$$Q = \frac{1}{2}L^{\alpha}\cdot K^{B}\cdot T^{\gamma} = \frac{1}{2}(100)^{0,4}(200)^{0,4}(2)^{0,2} = 30,17$$

5- حساب مرونة كل عنصر من عناصر الإنتاج و مرونة الإنتاج الكلية:

لدينا مرونة الإنتاج الكلية : $E = E_L + E_K + E_T$

حل المثال التطبيقي:

$$E_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{MPL_L}{APL_L} = \frac{\frac{\propto}{2} L^{\propto-1} K^{B} .T^{\delta}}{\frac{1}{2} L^{\propto-1} K^{B} .T^{\delta}} = \propto = 0,4$$

$$E_K = \frac{\Delta Q}{\Delta K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{MPL_K}{APL_K} = \frac{\frac{B}{2} L^{\propto} K^{B-1} .T^{\delta}}{\frac{1}{2} L^{\propto} K^{B-1} .T^{\delta}} = \beta = 0,4$$

$$E_T = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \cdot \frac{T}{Q} = \frac{MPL_T}{APL_T} = \frac{\beta}{2} \cdot L^{\alpha} \cdot K^{B-1} \cdot T^{\lambda} = \delta = 0,2$$

$$\propto + \beta + \delta = 0,4 + 0,4 + 0,2 = 1$$

مرونة الإنتاج الكلية 1

$$\boxed{e = 1}$$

حل المثال التطبيقي:

$$* EL=\frac{\Delta Q}{\Delta L}\cdot\frac{L}{Q}=\frac{MPL}{PML}=\frac{\frac{\alpha}{2}\cdot L^{\alpha-1}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda}}{\frac{1}{2}\cdot L^{\alpha-1}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda}}=\frac{\alpha}{2}\cdot 2=\alpha$$

$$\Leftrightarrow EL=\alpha$$

$$* EL=\frac{\Delta Q}{\Delta K}\cdot\frac{K}{Q}=\frac{MPK}{PMK}=\frac{\frac{B}{2}\cdot L^{\alpha}\cdot K^{B-1}\cdot T^{\lambda}}{\frac{1}{2}\cdot L^{B-1}\cdot T^{\lambda}}=\frac{B}{2}\cdot 2=B$$

$$\Leftrightarrow EL=B$$

$$* EL=\frac{\Delta Q}{\Delta T}\cdot\frac{T}{Q}=\frac{MPT}{PMT}=\frac{\frac{\lambda}{2}\cdot L^{\lambda}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda-1}}{\frac{1}{2}\cdot L^{\lambda}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda-1}}$$

$$* \Leftrightarrow EL=\lambda$$

حل المثال التطبيقي:

- ✓ إذن مرونة الإنتاج الكلي هي:

$$E = EL + Ek + ET = \alpha + B + \lambda$$

$$= 0.4 + 0.4 + 0.2 = 1$$

- وهذا ما يبرهن على الشرط الخاص بدلالة كوب دوغلاس.

محقق:E=1

$$* \; EL = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot \frac{L}{\Delta L} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = EL \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

$$* \; EK = \frac{\Delta Q}{\Delta K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot \frac{K}{\Delta K} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = EK \cdot \frac{\Delta K}{K}.$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = EL \cdot \frac{\Delta L}{L} + EK \cdot \frac{\Delta K}{K}.$$

$$= (0.4) \cdot (10\%) + (0.4) \cdot (05\%). \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = 4\% - 2\% = 2\%$$

- ✓ إذن الزيادة في الإنتاج هي:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 2\%$$