الرقــم الســري

حلول السلسلة رقم 03.

محور: المصفوفات والمحددات

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير.

قسم الجذع المشترك

السنة : الأولى.

الرقم السري: 01

حل السلسلة رقم 03:

حل التمرين 01: لتكن المصفوفات التالية:

سطر

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

عمود

① إيجاد نوع المصفوفات:

قاعدة:

نقول عن المصفوفة D أنها من النوع $(m \times n)$

إذا كان: m: هو عدد أسطر المصفوفة D

n: هو عدد أعمدة المصفوفة D

A: تتكون المصفوفة A من 2 أسطر و 3 أعمدة

وبالتالي هي من النوع $A(2\times 3)$

B: تتكون المصفوفة B من 3 أسطر و 3 أعمدة

وبالتالي هي من النوع $B(3\times 3)$

C: تتكون المصفوفة C من 3 أسطر و 2 عمود

وبالتالي هي من النوع $C(3\times 2)$

2/ إيجاد العناصر التالية:

a_{22} ، a_{31} ، b_{12} ، b_{22} ، b_{31} ، c_{22} ، c_{12} ، c_{23}

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

a_{ij} =

i هو السطر

j هو العمود

a_{22}: هو العنصر الذي يقع في السطر 2 والعمود 2

سطر عمود

إذن: $\boxed{a_{22}=5}$

الرقم التسلسلي
02

a_{31} = العنصر الذي يقع في السطر 3 والعمود الأول
(سطر، عمود)

وبما أن المجموعة A تحتوي على 2 سطر فإن a_{31} غير موجود.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

b_{12} = هو العنصر الذي يقع في السطر الأول والعمود 2.

⇐ $\boxed{b_{12} = 4}$

b_{22} = هو العنصر الذي يقع في السطر 2 العمود 2.
(سطر، عمود)

أي: $\boxed{b_{22} = 5}$

b_{31} = هو العنصر الذي يقع في السطر 3 والعمود 1.

أي: $\boxed{b_{31} = 2}$

$$C=\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

c_{12} = هو العنصر الذي يقع في السطر 1 والعمود 2.

أي: $c_{12} = 4$

c_{22} = هو العنصر الذي يقع في السطر 2 والعمود 2 أي.

$\boxed{c_{22} = 1}$

c_{23} = هو العنصر الذي يقع في السطر 2 العمود 3 أي

$\cancel{c_{23}}$

الرقم السري: 03

وبما أن المصفوفة C تحوي 2 عمود فإن العنصر c_{13} غير موجود.

حل تمرين 02: إيجاد المجاهيل:

$$\begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: تتساوى مصفوفتان إلا إذا كانتا من نفس النوع

نساوي كل خانة مع الخانة المماثلة في الجهة المقابلة

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2z+w=5 \\ z-w=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ 3-y-y=1 \\ w=5-2z \\ z-5+2z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ w=-1 \\ z=3 \end{cases}$$

2

$$\begin{pmatrix} x+y & z+3 \\ y-4 & z+w \end{pmatrix} = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O_2: هي مصفوفة ذات 2 سطر و 2 عمود كل عناصرها تساوي 0

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y-4=0 \\ z+3=0 \\ z+w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=4 \\ z=-3 \\ w=3 \end{cases}$$

سلسلة رقم 03

الرقم السري: 4

حل تمرين 03

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 2 & -3\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

① حساب المجاميع:

$$A+B=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}}_{(2\times 3)}+\underbrace{\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{pmatrix}}_{(2\times 3)}.$$

سطر عمود   عمود ، سطر

$$=\begin{pmatrix}1+3 & -2+0 & 3+2\\ 4+(-7) & 5+1 & -6+8\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}4 & -2 & 5\\ -3 & 6 & 2\end{pmatrix}}_{(2\times 3)}.$$

ملاحظة:

- $(A+B)$ موجود إذا كان A و B من نفس النوع.
- $(A-B)$ " " " A و B من نفس النوع

② $C+D=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 7\\ 2 & -3\\ 0 & -1\end{pmatrix}=$ غير موجودة

لا تمكن حساب $(C+D)$ لأن المصفوفة C من النوع $(2,2)$ أمّا المصفوفة D من النوع $(3,2)$

③ $$3D=3\underbrace{\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}}_{(2\times 2)}=\begin{pmatrix}3\times 3 & 3\times 5\\ 3\times 1 & 3\times(-2)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}9 & 15\\ 3 & -6\end{pmatrix}}_{(2\times 2)}$$

④ $$-5A=-5\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}}_{(2\times 3)}=\underbrace{\begin{pmatrix}-5 & +10 & -15\\ -20 & -25 & +30\end{pmatrix}}_{(2\times 3)}$$

الرقم السري: 5

⑤ $2A-3B = 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

$= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 & -6 \\ 21 & -3 & -24 \end{pmatrix}$.

$= \begin{pmatrix} 2+(-9) & -4+0 & 6-6 \\ 8+21 & -3+10 & -12-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix}$.

II إيجاد w ، z ، y ، x حيث :

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & 6+x+y \\ -1+z+w & 2w+3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = x+4 \\ 6+x+y = 3y \\ 3z = -1+z+w \\ 3w = 2w+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ w = 3 \end{cases}$$

الرقم السري

حل التمرين 04: إيجاد الجداء $A.B$

نذكر: يكون الجداء $A.B$ بهذا الترتيب موجود إذا كان: عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطر المصفوفة B.

① $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$A.B = \underset{(3\times 2)}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \underset{(2\times 3)}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{(3\times 3)}{\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}}$$

عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B

أسطر A ، أعمدة B

$$= \begin{pmatrix} 2\times 1+(-1)\times 3 & 2\times(-2)+(-1)\times 4 & 2\times(-5)+(-1)\times 0 \\ 1\times 1+0\times 3 & 1\times(-4)+0\times 4 & 1\times(-5)+0\times 0 \\ (-3)\times 1+4\times 3 & (-3)\times(-2)+4\times 4 & (-3)\times(-5)+4\times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

المصفوفة الناتجة
عدد أسطرها = عدد أسطر A
عدد أعمدتها = عدد أعمدة B

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$$A.B = \underset{(2\times 2)}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} \underset{(2\times 3)}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}} = \underset{(2\times 3)}{\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}}$$

عدد أعمدة A = عدد أسطر B

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+3\times 3 & 1\times 0+3\times(-2) & (-4)\times 1+3\times 6 \\ 2\times 2+(-1)\times 3 & 2\times 0+(-1)(-2) & 2\times(-4)+(-1)\times 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

الرقم السري
7

حل تمرين 05:
إيجاد منقول المصفوفات التالية
ملاحظة:
نسمي منقول المصفوفة A بالمصفوفة A^t

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow A^t \text{ منقول } A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow B^t \text{ منقول } B = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}.$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\2 & 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\\5 & 2\end{pmatrix}.$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 4\\0 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow D^t = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

حل تمرين 06:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (2x-5y\,,\,3x+y)$$

$B=\{u_1=(2,1)\,,\,u_2=(3,2)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

① حساب $f(u_1)$ و $f(u_2)$

$$f(u_1)=f(2,1)=(2\times2+(-5)\times1\,,\,3\times2+1)=(-1,7)$$

$$f(u_1)=(-1,7)$$

$$f(u_2)=f(3,2)=(2\times3+(-5)\times2\,,\,3\times3+2)=(-6,11)$$

$$f(u_2)=(-6,11)$$

② كتابة $f(u_1)$ و $f(u_2)$ في الأساس B:

الرقم السري
8

إيجاد صورة $V=(3,4)$ باستعمال المصفوفة المرافقة لـ f

ليكن $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ هو صورة V بواسطة f إذن:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=M_f\,V\Rightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23 & -41\\15 & 26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-23\times3+(-41)\times4\\15\times3+26\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-233\\129\end{pmatrix}$$

حل تمرين 07: ليكن f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$ معرّف بالمصفوفة

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 4\\5 & -6\end{pmatrix}$$

① حساب صورة $V(2,3,1)$ بواسطة f.

بما أن مجموعة بدء التطبيق f هي $\mathbb{R}^2$

و $V=(2,3,1)\in\mathbb{R}^3$ إذن $V\notin\mathbb{R}^2$ ومنه

لا يمكن حساب صورة V بواسطة f.

② إيجاد عبارة f:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=M_f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 4\\5 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-y\\2x+4y\\5x-6y\end{pmatrix}.$$

ومنه:

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$$
$$(x,y)\longrightarrow f(x,y)=(3x-y,\ 2x+4y,\ 5x-6y)$$

الرقم السري
و

حل تمرين 8: حساب المحددات

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times3 - 0\times1 = 6$$

قاعدة: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2\times0 - 4\times1) - 6(3\times0 - 4\times4) + 1(3\times1 - 2\times4)$$

$$= -8 - 6(-16) + 1(-5) = 83.$$

ط2

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc:cc} 2 & 6 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right|$$

$$= (2\times2\times0 + 6\times4\times4 + 1\times3\times1) - (1\times2\times4 + 2\times4\times1 + 6\times3\times0)$$

$$= 99 - 16 = 83$$

حل تمرين 09: حساب مقلوب مصفوفة

نسمي مقلوب المصفوفة A بـ A^{-1} حيث

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot(\mathrm{com}\,A)^{t}$$

$\det A$ = محدد المصفوفة A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

الرقم السري

10

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{com}\,A)^t$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2\times0-4\times1) - 6(3\times0-4\times4) + 1(3\times1-2\times4)$$

$$= 83 \neq 0$$

بما أن $\det A \neq 0$ فإن A قابلة للقلب

$$\text{com}\,A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \text{com}\,A = \begin{pmatrix} -4 & 16 & -5 \\ 1 & -4 & 22 \\ 22 & -5 & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{com}\,A)^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & 14 \end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$A^{-1} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & 14 \end{pmatrix}.$$

ملاحظة: لا يمكن حساب مقلوب مصفوفة للمصفوفة غير المربعة:

المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الأسطر = عدد الأعمدة