حلول الأسئلة المتبقية من السلسلة رقم 1

• التمرين 8 : /1 $E=\{(-1,2,0),(0,1,0),(1,2,2)\}$

بما أن بعد الفضاء يساوي عدد الأشعة، يكفي إثبات الاستقلال الخطي :

ليكن : $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

$$\alpha(-1,2,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(1,2,2)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow(-\alpha+\gamma,\ 2\alpha+\beta+2\gamma,\ 2\gamma)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\alpha+\gamma=0 & \text{------ } (1)\\ 2\alpha+\beta+2\gamma=0 & \text{---- } (2)\\ 2\gamma=0\Rightarrow\gamma=0 & \text{--- } (3)\end{cases}$$

$(1)\Leftrightarrow\gamma=0$

بالتعويض في (2) نجد أن : $\beta=0$

ومنه الأشعة مستقلة خطيا. بما أن : $\dim\mathbb{R}^3=\text{Card}\,E=3$

فإن مجموعة الأشعة E تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

• التمرين 9 : ليكن $\alpha,\beta,\gamma,\lambda\in\mathbb{R}$

$$\alpha(0,0,0,1)+\beta(0,0,1,1)+\gamma(0,1,1,1)+\lambda(1,1,1,1)=(0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \gamma+\lambda=0\\ \beta+\gamma+\lambda=0\\ \alpha+\beta+\gamma+\lambda=0\end{cases}$$

من الواضح أنه : بالتعويضات المتتالية نجد أن :

$$\alpha = \beta = \gamma = \lambda$$

ومنه الأشعة الأربعة مستقلة خطيًا وبما أن

بعد $\mathbb{R}^4 = 4 =$ عدد الأشعة ، إذًا : هذه الأشعة تشكل أساس

للفضاء $\mathbb{R}^4$.

التمرين 10 : /4 $W = \{(x,y,z), x = y - 3z\}$

ليكن $(x,y,z) \in W$ ومنه لدينا $x = y - 3z$

$$(x,y,z) = (y-3z, y, z) = (y,y,0) + (-3z, 0, z)$$
$$= y(1,1,0) + z(-3,0,1)$$

إذا : $\{(1,1,0), (-3,0,1)\}$ تشكل مولدة للفضاء الشعاعي الجزئي.

• إثبات الاستقلال الخطي

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,1,0) + \beta(-3,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 3\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

ومنه الشعاعان مستقلان خطيا .

إذا نستنتج أن $\{(1,1,0), (-3,0,1)\}$ تشكل أساس للفضاء الشعاعي

الجزئي W .

التمرين 11 :

• $(2,-1)$ هي إحداثيات A في الأساس $\{(1,0),(0,1)\}$

(α,β) هي إحداثيات A في الأساس $\{e_1,e_2\}$

$$A=(2,-1)=\alpha e_1+\beta e_2$$
$$=\alpha(2,-1)+\beta(3,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+3\beta=2 \\ -\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=1 \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة ① نجد :

$$2+3\beta=2 \Rightarrow 3\beta=0$$
$$\Rightarrow \beta=0$$

ومنه إحداثيات A في الأساس $\{e_1,e_2\}$ هي : $(1,0)$.

• $(0,0)$ هي إحداثيات B في الأساس : $\{(1,0),(0,1)\}$

(α,β) هي إحداثيات B في الأساس : $\{e_1,e_2\}$

$$B=(0,0)=\alpha e_1+\beta e_2$$
$$=\alpha(2,-1)+\beta(3,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ -\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0 \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة الأولى نجد : $\beta=0$

ومنه إحداثيات B في الأساس $\{e_1,e_2\}$ هي : $(0,0)$.