قسم الجذع المشترك

رياضيات 2

السنة الأولى

السلسلة رقم 02

التمرين 01: هل التطبيقات التالية خطية أم لا ؟

1) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z)=(x,y,0)$

2) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=(x+1,y+2)$

3) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=(x+y,x)$

4) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y,z)=2x-3y+4z$

5) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y)=(x+1,2y,x+y)$

6) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=(2x-y,x)$

التمرين 02: 1) بين أن يوجد تطبيق خطي وحيد $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ يحقق $f(1,2)=(2,3)$ و $f(0,1)=(1,4)$

2) أوجد صيغة f أي أوجد $f(x,y)$ ثم أوجد $f(5,6)$ و $f^{-1}(-2,7)$

التمرين 03: لنفترض أن $F:V \longrightarrow U$ و $G:U \longrightarrow W$ تطبيقان خطيان, بين أن تطبيق التركيب $G\circ F:V \longrightarrow W$ تطبيق خطي.

التمرين 04: ليكن $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي المعرف بواسطة $f(x,y,s,t)=(x-y+s+t,x+2s-t,x+y+3s-3t)$ أوجد قاعدة الصورة Imf وكذلك بعدها, و أوجد قاعدة للنواة kerf و كذلك بعدها.

التمرين 05: ليكن $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي المعرف بواسطة $f(x,y,z)=(x+2y-z,y+z,x+y-2z)$ أوجد قاعدة الصورة Imf وكذلك بعدها, و أوجد قاعدة للنواة kerf و كذلك بعدها.

التمرين 06: أوجد تطبقا خطيا $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ تكون صورته مولدة بواسطة $(1,2,0,-4)$ و $(2,0,-1,-3)$

التمرين 07: أوجد تطبقا خطيا $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تكون الأشعة $(1,-1,0)$ و $(2,0,1)$ أساس لنواته .

التمرين 08: ليكن التطبيقات الخطية التالية : $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ و $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ و $h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرفة بواسطة : $f(x,y,z)=(2x,y+z),\ g(x,y,z)=(x-z,y),\ h(x,y)=(y,x)$.

1) أوجد $(f+g)(v)$ و $(3f)(v)$ حيث $v=(2,3,4)$.

2) أوجد $(2f-5g)(w)$ حيث $w=(5,1,3)$.

التمرين 09: ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ المعرف كما يلي :

$$f(x,y,z)=(x+z,x-y,z+y,x+y+2z)$$

عين نواة f و صورته. هل f متباين, غامر؟

التمرين 10: ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ المعرف كما يلي : $f(x,y)=(x+y,x-y,x+y)$

عين نواة f و صورته. هل f متباين, غامر؟

التمرين 11: ليكن $B=\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$ الأساس القانوني ل $\mathbb{R}^3$ و ليكن f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^3$ معرف بواسطة :

$$f(e_1)=-2e_1+2e_3,\ f(e_2)=3e_2,\ f(e_3)=-4e_1+4e_3$$

1) عين أساس للنواة f, هل f متباين؟ هل يمكن أن يكون f غامر؟ لماذا؟
2) عين أساس للصورة f, ما هي رتبة f ؟

سلسلة تمارين رقم 2 [مقياس الرياضيات سنة أولى]

ملاحظة هامة: لقد تم إلغاء التمارين رقم: 3، 6 و 7.

• **التمرين 01:** 1/

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (x,y,0)$$

تذكرة بالتعريف: نقول عن f أنه تطبيق خطي إذا كان:

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \forall u,v \in \mathbb{R}^3 : f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

ليكن: $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ و $u = (x_1,y_1,z_1)$، $v = (x_2,y_2,z_2)$

$$\bullet\ f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha(x_1,y_1,z_1) + \beta(x_2,y_2,z_2))$$
$$= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \cdots\cdots (1)$$

$$\bullet\ \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha f(x_1,y_1,z_1) + \beta f(x_2,y_2,z_2)$$
$$= \alpha(x_1,y_1,0) + \beta(x_2,y_2,0)$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \cdots\cdots (2)$$

$(1) = (2) \Rightarrow$ f تطبيق خطي.

2/

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x+1, y+2)$$

ليكن: $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ و $u = (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$، $v = (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\bullet\ f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha(x_1,y_1) + \beta(x_2,y_2))$$
$$= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_2 + 1, \alpha y_1 + \beta y_2 + 2) \cdots\cdots (1)$$

$$\bullet\ \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha f(x_1,y_1) + \beta f(x_2,y_2)$$
$$= \alpha(x_1+1, y_1+2) + \beta(x_2+1, y_2+2)$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha + \beta x_2 + \beta, \alpha y_1 + 2\alpha + \beta y_2 + 2\beta) \cdots\cdots (2)$$

$(1) \neq (2) \Rightarrow$ f ليس تطبيق خطي

/3

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \rightarrow f(x,y)=(x+y,x)$

ليكن: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ و $U=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ ، $V=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

- $f(\alpha U+\beta V)=f(\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2))$

$=f(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2)$

$=(\alpha x_1+\beta x_2+\alpha y_1+\beta y_2,\ \alpha x_1+\beta x_2)$

$=(\alpha(x_1+y_1)+\beta(x_2+y_2),\ \alpha x_1+\beta x_2)$ ------ ①

- $\alpha f(U)+\beta f(V)=\alpha f(x_1,y_1)+\beta f(x_2,y_2)$

$=\alpha(x_1+y_1,x_1)+\beta(x_2+y_2,x_2)$

$=(\alpha(x_1+y_1),\alpha x_1)+(\beta(x_2+y_2),\beta x_2)$

$=(\alpha(x_1+y_1)+\beta(x_2+y_2),\ \alpha x_1+\beta x_2)$ ------ ②

① = ② $\Rightarrow$ f تطبيق خطي

/4

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \rightarrow 2x-3y-4z$

ليكن: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ و $U=(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3$ ، $V=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$

- $f(\alpha U+\beta V)=f(\alpha(x_1,y_1,z_1)+\beta(x_2,y_2,z_2))=f(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2,\alpha z_1+\beta z_2)$

$=2(\alpha x_1+\beta x_2)-3(\alpha y_1+\beta y_2)+4(\alpha z_1+\beta z_2)$

$=\alpha(2x_1-3y_1+4z_1)+\beta(2x_2-3y_2+4z_2)$ ------ ①

- $\alpha f(U)+\beta f(V)=\alpha f(x_1,y_1,z_1)+\beta f(x_2,y_2,z_2)$

$=\alpha(2x_1-3y_1+4z_1)+\beta(2x_2-3y_2+4z_2)$ ------ ②

① = ② $\Rightarrow$ f تطبيق خطي

/5

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \rightarrow (x-y,\ 2y,\ x+y)$

ليكن: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ و $U(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ ، $V(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

- $f(\alpha U+\beta V)=f(\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2))=f(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2)$

$$= (\alpha x_1+\beta x_2+1,\ 2(\alpha y_1+\beta y_2),\ \alpha x_1+\beta x_2+\alpha y_1+\beta y_2)$$
$$= (\alpha x_1+\beta x_2+1,\ 2\alpha y_1+2\beta y_2,\ \alpha(x_1+y_1)+\beta(x_2+y_2)) \cdots\cdots (1)$$

• $\alpha f(u)+\beta f(v) = \alpha f(x_1,y_1)+\beta f(x_2,y_2)$
$$= \alpha(x_1+1,\ 2y_1,\ x_1+y_1)+\beta(x_2+1,\ 2y_2,\ x_2+y_2)$$
$$= (\alpha x_1+\alpha+\beta x_2+\beta,\ 2\alpha y_1+2\beta y_2,\ \alpha(x_1+y_1)+\beta(x_2+y_2)) \ (2)$$

$(1) \neq (2) \rightarrow$ f ليس تطبيق خطي

/6

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (2x-y,\ x)$$

ليكن : $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ و $u=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ ، $v=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

• $f(\alpha u+\beta v) = f(\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2)) = f(\alpha x_1+\beta x_2,\ \alpha y_1+\beta y_2)$
$$= (2(\alpha x_1+\beta x_2)-(\alpha y_1+\beta y_2),\ \alpha x_1+\beta x_2)$$
$$= (\alpha(2x_1-y_1)+\beta(2x_2-y_2),\ \alpha x_1+\beta x_2) \cdots\cdots (1)$$

• $\alpha f(u)+\beta f(v) = \alpha f(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2)$
$$= \alpha(2x_1-y_1,\ x_1)+\beta(2x_2-y_2,\ x_2)$$
$$= (\alpha(2x_1-y_1)+\beta(2x_2-y_2),\ \alpha x_1+\beta x_2) \cdots\cdots (2)$$

$(1) = (2) \rightarrow$ f تطبيق خطي

• التمرين 02 : /1 الإجابة على السؤال الأول هو تطبيق للنظرية :

تذكير بالنظرية : ليكن E و F فضاءين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$

$\beta=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ أساس للفضاء E و $\beta'=\{f_1,\dots,f_n\}$ أساس للفضاء F،

اذن يوجد تطبيق خطي وحيد : $T: E \longrightarrow F$ حيث :

$$T(e_i) = f_i \ ;\ i = 1,2,\dots,n.$$

• نبرهن أولا : $\{(0,1),(1,2)\}$ أساس لـ $E=\mathbb{R}^2$ (مجموعة البدء)

بما أن بعد $\mathbb{R}^2$ = عدد الأشعة إذا يكفي إثبات الاستقلال الخطي

ليكن : $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$= (\alpha x_1 + \beta x_2 + 1, 2(\alpha y_1 + \beta y_2), \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_2 + 1, 2\alpha y_1 + 2\beta y_2, \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2)) \cdots\cdots (1)$

- $\alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha f(x_1, y_1) + \beta f(x_2, y_2)$

$= \alpha(x_1 + 1, 2y_1, x_1 + y_1) + \beta(x_2 + 1, 2y_2, x_2 + y_2)$

$= (\alpha x_1 + \alpha + \beta x_2 + \beta, 2\alpha y_1 + 2\beta y_2, \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2)) (2)$

$(1) \neq (2) \rightarrow$ f ليس تطبيق خطي

/6

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto f(x, y) = (2x - y, x)$

ليكن : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ ، $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

- $f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$

$= (2(\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2), \alpha x_1 + \beta x_2)$

$= (\alpha(2x_1 - y_1) + \beta(2x_2 - y_2), \alpha x_1 + \beta x_2) \cdots\cdots (1)$

- $\alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha f(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)$

$= \alpha(2x_1 - y_1, x_1) + \beta(2x_2 - y_2, x_2)$

$= (\alpha(2x_1 - y_1) + \beta(2x_2 - y_2), \alpha x_1 + \beta x_2) \cdots\cdots (2)$

$(1) = (2) \rightarrow$ f تطبيق خطي

- التمرين 02 : 1/ الإجابة على السؤال الأول هو تطبيق للنظرية :

تذكير بالنظرية : ليكن E و F فضاءين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$

$\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ أساس للفضاء E و $\beta' = \{f_1, \dots, f_n\}$ أساس للفضاء F ،

إذن يوجد تطبيق خطي وحيد : $T : E \longrightarrow F$ حيث :

$T(e_i) = f_i \; ; \; i = 1, 2, \dots, n.$

- نبرهن أن : $\{(0,1), (1,2)\}$ أساس لـ $E = \mathbb{R}^2$ (مجموعة البدء)

بما أن بعد $\mathbb{R}^2$ = عدد الأشعة ، إذا يكفي إثبات الاستقلال الخطي

ليكن : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(0,1)+\beta(1,2)=(0,0) \Leftrightarrow (\beta,\alpha+2\beta)=(0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha+2\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \end{cases}$$

إذاً $\{(0,1),(1,2)\}$ تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

• نبرهن أيضاً أن: $\{(1,4),(2,3)\}$ تشكل أساس لـ $F=\mathbb{R}^2$ (مجموعة الوصول)

بما أن: $\dim \mathbb{R}^2$ = عدد الأشعة = 2 إذن: يكفي لنا إثبات الاستقلال الخطي، ليكن: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\alpha(1,4)+\beta(2,3)=(0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+2\beta,4\alpha+3\beta)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=0 \;\ldots (1) \\ 4\alpha+3\beta=0 \;\ldots (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \alpha=-2\beta$

$(2) \Rightarrow 4(-2\beta)+3\beta=0 \Rightarrow -5\beta=0 \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow \alpha=0$

ومنه الشعاعان مستقلان خطياً

إذن: $\{(1,4),(2,3)\}$ تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

حسب النظرية السابقة نستنتج أنه: يوجد تطبيق خطي وحيد $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ حيث: $f(0,1)=(1,4)$ و $f(1,2)=(2,3)$

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$(x,y)\longmapsto f(x,y)$$

/2

بما أن f تطبيق خطي فإنه يكتب في حالته العامة من الشكل:

$$\exists\, \alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in\mathbb{R}:\; f(x,y)=(\alpha_1x+\beta_1y,\;\alpha_2x+\beta_2y)$$

لدينا $f(1,2)=(2,3)$ و $f(0,1)=(1,4)$

$$f(1,2)=(\alpha_1+2\beta_1,\alpha_2+2\beta_2)=(2,3)$$

$$f(0,1)=f(\beta_1,\beta_2)=(1,4)$$

$$\begin{cases} \alpha_1+2\beta_1=2 \;\ldots\ldots (1) \\ \alpha_2+2\beta_2=3 \;\ldots\ldots (2) \\ \beta_1=1 \\ \beta_2=4 \end{cases}$$

① $\Rightarrow \alpha_1 + 2(1) = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

② $\Rightarrow \alpha_2 + 2(4) \Rightarrow \alpha_2 + 8 = 3 \Rightarrow \alpha_2 = -5$

إذن صيغة التطبيق الخطي هو:

$f(x,y) = (y, -5x + 4y).$

2/ إيجاد كل من:

- $f(5,6) = (6, -5(5) + 4(6))$

  $= (6, -1)$

- $f^{-1}(-2,7) = (x,y)$ يعني إيجاد (x,y)؟

  $\Rightarrow f(x,y) = (-2,7)$

  $\Rightarrow (y, -5x + 4y) = (-2,7)$

  $$\Rightarrow \begin{cases} y = -2 & \cdots\cdots ① \\ -5x + 4y = 7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② $\Rightarrow -5x + 4(-2) = 7 \Rightarrow -5x - 8 = 7$

$\Rightarrow -5x = 15$

$\Rightarrow x = -3$

إذن: $f^{-1}(-2,7) = (-3,-2)$

* ملاحظات هامة : التسلسل المنطقي حسب سهولة التمارين
* لاستيعاب مفهوم (نواة f) $\ker f$ و(صورة f) $\operatorname{Im} f$ من المستحسن
ترك التمرينين 4 و 5 في الأخير .

التمرين 08 : لدينا التطبيقات الخطية التالية :

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
  $(x,y,z) \to f(x,y,z) = (2x, y+z)$
- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
  $(x,y,z) \to g(x,y,z) = (x-z, y)$
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
  $(x,y) \to h(x,y) = (y,x)$

1/ • $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$; $v = (2,3,4)$

$$= f(2,3,4) + g(2,3,4)$$
$$= (2\times 2, 3+4) + (2-4, 3)$$
$$= (4,7) + (-2,3) = (2,10)$$

• $(3f)(v) = 3f(v) = 3f(2,3,4) = 3(4,7) = (12,21)$

2/ $(2f-5g)(w) = 2f(w) - 5g(w)$; $w = (5,1,3)$

$$= 2f(5,1,3) - 5g(5,1,3)$$
$$= 2(2\times 5, 4) - 5(5-3, 1)$$
$$= 2(10,4) - 5(2,1)$$
$$= (20,8) - (10,5)$$
$$= (10,3) .$$