1 Intégrales numériques

Le théorème fondamental du calcul des intégrales est basé sur la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

où f est une fonction continue sur $[a,\, b]$ dans $\mathbb{R}$, et F est une primitive de f.

Dans plusieurs cas le calcul explicite de l'intégrale, d'une fonction f continue sur $[a,\, b]$, définie par $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ est trés compliqué ou impossible si on utilise les méthodes usuelles de calcul d'intégrales. Par conséquent, on fait appel à des méthodes numériques afin de calculer une approximation de $I(f)$. Dans ces méthodes numériques, la fonction f, est remplacée par une somme finie constituée de n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de $[a,\, b]$, avec $0 \leq i \leq n-1$ et telle que $a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b$. On a alors

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx.$$

Le principe de ces méthodes numériques du calcul de $I(f)$ est de calculer la somme des surfaces de rectangles, trapèzes, ou d'autres formes géométriques où on connait leurs surfaces

Parmi les méthodes numériques du calcul de $I(f)$ est

1.1 Méthode de rectangles

La méthode des rectangles consiste à approximer $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ par l'aire d'un rectangle de dimensions h_i, et $f(\xi_i)$ où $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Alors on obtient

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq I_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i)$$

avec $h_i = x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$, et les points d'interpolations

$x_i = a + i\dfrac{b-a}{n},\ \ 0 \leq i \leq n.$

D'aprés le choix de ξ_i on a trois méthodes:

1.1.1 Méthode de réctangles à gauche:

Si $\xi_i = x_i$ alors

$$I_n^g(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Elle consiste à approximer $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ par l'aire d'un rectangle de dimensions $\frac{b-a}{n}$ et $f(x_i)$

1.1.2 Méthode de réctangles à droite:

Si $\xi_i = x_{i+1}$ alors

$$I_n^d(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$$

1.1.3 Méthode de réctangles au point milieu:

Si $\xi_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$ alors

$$I_n^m(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$$

La valeur approchée de $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ est $I_n(f)$ et l'erreur absolue $E(f)$ de l'approximation est :
1) Si $f \in C^1[a,b]$, alors

$$E(f) = |I(f) - I_n(f)| \leq E_{\max} = M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$$

dans les deux méthodes de réctangles à droite et gauche où $M_1 = \max_{a \leq x \leq b} \left| f'(x) \right|$
2) Si $f \in C^2[a,b]$, alors

$$E(f) = |I(f) - I_n^m(f)| \leq E_{\max} = M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

Dans le cas de la méthode au point milieu où $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} \left| f''(x) \right|$

Exemple1:

Calculer $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ en utilisant la méthode des rectangles à droite, à gauche et au point milieu à l'aide des valeurs de $f(x) = e^{x^2}$ avec $n = 4$, et évaluer l'erreur absolue $E(f)$ et l'erreur maximale $E_{\max}$.

On a $x_0 = 0$, et $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{4}$, d'où les points d'interpolations

$$x_i = 0 + i\frac{1}{4},\ \ 0 \leq i \leq 4.$$

Donc $x_1 = 0 + 1\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $x_2 = 0 + 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $x_3 = 0 + 3\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $x_4 = 4\frac{1}{4} = 1$

On a: $f(0) = 1$, $f(1/4) = 1.0645$, $f(1/2) = 1.284$, , $f(3/4) = 1.755\,1$, et

$f(1) = 2.7183$, et $I(f) = \int\limits_0^1 e^{x^2} dx = 1.462\,7$, d'où

Par la méthode de rectangles à droite on a:

$$I(f) \simeq I_n^d(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = \frac{1}{4}(1.0645 + 1.284 + 1.755\ + 2.7183) = 1.705\,5$$

et

$$E(f) = \left| I(f) - I_n^d(f) \right| = |1.462\,7 - 1.705\,5| = 0.2428.$$

Par la méthode de rectangles à gauche on a:

$$I(f) \simeq I_n^g(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{1}{4}(1 + 1.0645 + 1.284 + 1.755\,1 + 2.7183) = 1.955\,5$$

et

$$E(f) = |I(f) - I_n^g(f)| = |1.462\,7 - 1.955\,5| = 0.4928.$$

Par la méthode au point milieu on a:

$f\left(\dfrac{\frac{1}{4}+0}{2}\right) = 1.015\,7$, $\quad f\left(\dfrac{(1/2+1/4)}{2}\right) = 1.151\,0$,

$f\left(\dfrac{3/4+1/2}{2}\right) = 1.477\,9$, $\quad f\left(\dfrac{1+3/4}{2}\right) = 2.150\,3$, d'où

$$I_n^m(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) = \frac{1}{4}(1.015\,7 + 1.151\,0 + 1.477\,9 + 2.150\,3) = 1.448\,7$$

et

$$E(f) = |I(f) - I_n^m(f)| = |1.462\,7 - 1.448\,7| = 0.014.$$

De plus on a:

$f^{'}(x) = 2xe^{x^2}$, et $f^{''}(x) = \left(2+4x^2\right)e^{x^2}$,donc
$f^{'}(0) = 0,\ f^{'}(1/4) = 0.532\,25,\ f^{'}(1/2) = 3.\,210\,1,\ f^{'}(3/4) = 2.\,632\,6,$
et $f^{'}(1) = 5.\,436\,6$
$f^{''}(0) = 2,\ f^{''}(1/4) = 2.\,395\,1,\ f^{''}(1/2) = 3.\,852\,1,\ f^{''}(3/4) = 7.\,459\,0$ et
$f^{''}(1) = 16.\,310.$
L'erreur maximale $E_{\max}$ pour les méthodes de rectangles à droite, à gauche est égale à

$$E_{\max} = \max_{0\leq x\leq 1}\left|f^{'}(x)\right|\frac{(b-a)^2}{2n} = 5.\,436\,6 \times \frac{1}{8} = 0.679\,58$$

L'erreur maximale $E_{\max}$ pour la méthode au point milieu est égale à

$$E_{\max} = \max_{0\leq x1}\left|f^{''}(x)\right|\frac{(b-a)^3}{24n^2} = 16.\,31.0 \times \frac{1}{24\times 16} = 4.\,247\,4\times 10^{-2}$$

Pour conclure on a le tableau suivant:

	Méthode des rectangles à droite	rectangles à gauche	rectangles au point milieu
$I_n(f)$	$1.\,705\,5$	$1.\,955\,5$	$1.\,448\,7$
$E(f)$	0.2428	0.4928	0.014
$E_{\max}(f)$	$0.679\,58$	$0.679\,58$	0.042474

La valeur exacte de $I(f)$ est $1.\,462\,7$, on remarque que la méthode de rectangles au point milieu donne une erreur 0.014 inférieure à l'erreur maximale $E_{\max} = 4.2\times 10^{-2}$qui est plus petite que les autres erreurs, donc on peut conclure que la méthode de rectangles au point milieu a donné une bonne approximation de $I(f)$.

1.2 Méthode de Trapèzes

On sait que la surface d'un trapèze est égale à la somme de la petite base et la grande base multiplie par la moitié de la hauteur.

Donc la méthode de trapèze consiste à approximer $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ par l'aire d'un trapèze de dimensions $h_i = x_{i+1} - x_i,\ f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$.
On obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq I_n^t(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right),$$

et dans le cas où $h_i = \dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i = 0, ..., n$, on a:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq I_n^t(f) = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

L'erreur d'intégration de la méthode des trapèzes est majorée par :

$$E(f) = \left|I(f) - I_n^t(f)\right| \leq E_{\max} = M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2} \text{ où } M_2 = \max_{a \leq x \leq b} \left|f''(\ x)\ \right|$$

Exemple 2:

Calculer $\int_0^1 e^{x^2} dx$ en utilisant la méthode des trapèzes à l'aide des valeurs de $f(x) = e^x$ aux points $0, \frac{1}{4}, \ \frac{1}{2}\ , \frac{3}{4}$et 1, et évaluer l'erreur absolue $E(f)$ et l'erreur maximale $E_{\max}$. On a
$f(0) = 1,\ f(1/4) = 1.0645,\ f(1/2) = 1.284,,\ \ f(3/4) = 1.7551,$
et $f(1) = 2.7183$, donc

$$I_n^t(f) = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) = \frac{1}{8}(1 + 2.7183 + 2(1.0645 + 1.284 + 1.7551)) = 1.4907.$$

L'erreur absolue d'intégration de la méthode des trapèze est égale à

$$E(f) = \left|I(f) - I_n^t(f)\right| = |1.4627 - 1.4907| = 0.028.$$

On a $f''(x) = \left(4x^2 + 2\right) e^{x^2}$ donc $M_2 = \max_{0 \leq x \leq 1} \left|f''(\ x)\ \right| = 6e = 16.310,$
d'où l'erreur maximale

$$E_{\max} = 16.31 \times \frac{1}{12 \times 16} = 8.4948 \times 10^{-2}$$

Exemple 3:

Considérant l'intégrale définie, sur $[0, 2]$, par $f(x) = x + \ln(x+1)$.
Déterminer le nombre de sous-intervalles permettant d'atteindre une erreur d'intégration inférieure à 10^{-3} en utilisant la méthode des trapèzes.
La fonction $f \in C^2([1, 2])$.

On a $f''(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$, donc $M_2 = \max_{0 \leq x \leq 2} \left|f''(\ x)\ \right| = \left|\dfrac{-1}{(2+1)^2}\right| = \dfrac{1}{9}$,
alors pour d'atteindre une erreur $E(f) \leq 10^{-3}$ on résout l'inégalité suivante:

$$E(f) \leq 10^{-3} \Leftrightarrow E_{\max} = \frac{1}{9}\frac{8}{12n^2} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n^2 \geq 74.074 \Leftrightarrow n \geq 8.60.$$

Il en résulte qu'à partir de neuf sous-intervalles pour atteindre une erreur inférieure à 10^{-3}.

1.3 Méthode de Simpson

Dans la méthode Simpson due à Thomas Simpson (1710-1761), la fonction f est remplacée par un polynôme du second degré définissant un arc de parabole passant par les points d'ordonnées $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$, $f\left(\frac{(x_{i+1}+x_i)}{2}\right)$. L'approximation de cette méthode s'écrit

$$I_n^S(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{6}(x_{i+1}-x_i)\left(f(x_i)+f(x_{i+1})+4f\left(\frac{(x_{i+1}+x_i)}{2}\right)\right)\right)$$

La formule dans le cas où $(x_{i+1}-x_i)=\frac{b-a}{n}$ devient

$$I_n^S(f)=\frac{b-a}{3n}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1,\ i\text{ impair}}^{n-1}f(x_i)+2\sum_{i=2,\ i\text{ paire}}^{n-2}f(x_i)\right)$$

L'erreur d'intégration de la méthode de Simpson est majorée par :

$$E(f)=\left|I(f)-I_n^S(f)\right|\le E_{\max}=M_4\frac{(b-a)^5}{180n^4}\text{ où }M_4=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

Exemple: Calculer $\int_0^1 e^{x^2}dx$ en utilisant la méthode de Simpson à l'aide des valeurs de $f(x)=e^{x^2}$ aux points $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$et 1, et évaluer l'erreur absolue $E(f)$ et l'erreur maximale.

On a $f(0)=1$, $f(1/4)=1.0645$, $f(1/2)=1.284,$, $f(3/4)=1.7551$, et $f(1)=2.7183$.

$$I_n^S(f)=\frac{b-a}{3n}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1,\ i\text{ impair}}^{n-1}f(x_i)+2\sum_{i=2,\ i\text{ paire}}^{n-2}f(x_i)\right)=\frac{1}{12}(1+2.7183+4(1.0645+1.7551)+2(1.284))=1.4637,$$

donc l'erreur absolue

$$E(f)=\left|I(f)-I_n^S(f)\right|=|1.4627-1.4637|=0.001.$$

On a $f^{(4)}(x)=4e^{x^2}\left(4x^4+12x^2+3\right)$, d'où

$M_4=4e^1(4+12+3)=206.59$ et $E(f)\le 206.59\frac{1}{2880\times 4^4}$, et l'erreur maximale

$$E_{\max}=206.59\frac{1}{180\times 4^4}=4.4833\times 10^{-3}$$

Enfin on a le tableau explicatif suivant:

	rectangle à droite	rectangle à gauche	rectangle au point milieu	trapèze	Simpson
$I_n(f)$	1.7055	1.9555	1.4487	1.4907	1.4637
$E(f)$	0.2428	0.4928	0.014	0.028	0.001
$E_{\max}(f)$	0.67958	0.67958	0.042474	0.084948	0.004483

La valeur exacte de $I(f) = \int\limits_0^1 e^{x^2} dx = 1.4627$, donc on remarque que la méthode de Simpson donne une erreur 0.001 et une l'erreur maximale $E_{\max} = 0.004483$ qui est plus petite que les autres erreurs, donc on peut conclure que la méthode de Simpson a donné une bonne approximation de $I(f)$.