Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie 2019/2020
Master 1: **M1.4 (Modèle linéaire)**

Solution de la 3ème partie de l'exercice N°2 de la Série N°2

Exercice 1 *Soit* $Y_r := X_r - \mathbf{1}_3 g_r^t$ *et* $Y_c := X_c - \mathbf{1}_4 g_c^t$ *les matrices centrées des profils-linges les profils-colonnes, respectivement. Les matrices de variance-covariances (pondérées) des profils-lignes et des profils-colonnes sont définies, respectivement, par*

$$V_r := Y_r^t D_r Y_r \text{ et } V_c := Y_c^t D_c Y_c.$$

L'analyse factorielle des correspondances est basée essentiellement sur les deux matrices $V_r D_c^{-1}$ *et* $V_c D_r^{-1}$.

1-Déduire de la question 2, de l'exercice 1, les valeurs propres et les vecteurs propres de $V_r D_c^{-1}$ *et* $V_c D_r^{-1}$.

2-Que représente g_r *(resp.* g_c*) pour la matrice* $V_r D_c^{-1}$ *(resp.* $V_c D_r^{-1}$*)?.*

3-Donner une base $D_c^{-1}-$*orthonormée (resp.* $D_r^{-1}-$*orthonormée) de* $\mathbb{R}^4$ *(resp. de* $\mathbb{R}^3$*) basée sur les vecteurs propres de la matrice* $V_r D_c^{-1}$ *(resp.* $V_c D_r^{-1}$*).*

4-Donner les axes principaux des profils-linges X_r *et des profils-colonnes* X_c.

5-Calculer l'inertie totale du profils-lignes X_r *par rapport à son centre de gravité* g_r, *et déduire celle de profils-colonnes par rapport à son centre de gravité* g_r.

6-Quelles sont les pourcentages d'inerties par rapport aux axes principaux pour les deux profils?

7-Calculer les inerties du profils-lignes X_r *et des profils-colonnes par rapport à leurs axes principaux.*

8-Quelles sont les pourcentages d'inerties par rapport aux axes principaux pour les deux profils?

****

Solution

Rappel: la matrice des effectifs observés est

$$N^* = \begin{pmatrix} 50 & 280 & 120 & 20 \\ 8 & 29 & 210 & 350 \\ 150 & 230 & 100 & 40 \end{pmatrix}.$$

La matrice des fréquences observées est

$$N = \begin{pmatrix} 50/1587 & 280/1587 & 120/1587 & 20/1587 \\ 8/1587 & 29/1587 & 210/1587 & 350/1587 \\ 150/1587 & 230/1587 & 100/1587 & 40/1587 \end{pmatrix}.$$

1) Le centre de gravité des profils-lignes:

$$g_r = (0.131\,06, 0.339\,63, 0.270\,95, 0.258\,35)^t.$$

Le centre de gravité des profils-colonnes:

$$g_c = (0.296\,16, 0.376\,18, 0.327\,66)^t.$$

Matrice diagonale des profils-linges

$$D_r = \begin{pmatrix} 0.296\,16 & 0 & 0 \\ 0 & 0.376\,18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.327\,66 \end{pmatrix}.$$

2) Matrice diagonale des profils-colonnes

$$D_c = \begin{pmatrix} 0.131\,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.339\,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.270\,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.258\,35 \end{pmatrix}.$$

3) Matrices des profils-linges

$$X_r = D_r^{-1}N = \begin{pmatrix} 0.106\,38 & 0.595\,74 & 0.255\,32 & 4.\,255\,3 \times 10^{-2} \\ 0.013\,4 & 4.\,857\,6 \times 10^{-2} & 0.351\,76 & 0.586\,27 \\ 0.288\,46 & 0.442\,31 & 0.192\,31 & 7.\,692\,4 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

Matrices des profils-collones

$$X_c = D_c^{-1}N^t = \begin{pmatrix} 0.240\,39 & 3.\,846\,3 \times 10^{-2} & 0.721\,18 \\ 0.519\,49 & 5.\,380\,4 \times 10^{-2} & 0.426\,72 \\ 0.279\,07 & 0.488\,37 & 0.232\,56 \\ 0.048\,78 & 0.853\,66 & 9.\,756\,1 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

La matrice

$$A_r := X_r^t X_c^t = \begin{pmatrix} 0.234\,12 & 0.179\,08 & 0.103\,32 & 4.\,477\,1 \times 10^{-2} \\ 0.464\,06 & 0.500\,84 & 0.292\,84 & 0.113\,68 \\ 0.213\,60 & 0.233\,62 & 0.287\,76 & 0.331\,50 \\ 8.\,825\,5 \times 10^{-2} & 8.\,647\,5 \times 10^{-2} & 0.316\,08 & 0.510\,06 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$A_c := X_c^t X_r^t = \begin{pmatrix} 0.408\,38 & 0.155\,22 & 0.356\,54 \\ 0.197\,16 & 0.675\,39 & 0.194\,48 \\ 0.394\,46 & 0.169\,39 & 0.449 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A_r:

$$\lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.479\,66, \lambda_3 = 5.\,310\,9 \times 10^{-2}, \lambda_4 = 5.\,997 \times 10^{-7}.$$

Les vecteurs propres de A_r:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0.250\,99 \\ 0.650\,40 \\ 0.518\,87 \\ 0.494\,74 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0.723\,78 \\ -0.625\,73 \\ -0.248\,77 \\ 0.150\,7 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} 4.\,257\,9 \times 10^{-2} \\ -0.409\,29 \\ 0.801\,19 \\ -0.434\,47 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A_c :

$$\lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 0.479\,66, \lambda_3 = 5.\,310\,9 \times 10^{-2}.$$

Les vecteurs propres de A_c :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0.510\,48 \\ 0.648\,41 \\ 0.564\,78 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0.383\,99 \\ -0.816\,03 \\ 0.432\,02 \end{pmatrix}, u_3 \begin{pmatrix} 0.709\,33 \\ -4.\,450\,4 \times 10^{-3} \\ -0.704\,86 \end{pmatrix}.$$

Remarques:

$$(\lambda_1 = 1) \longleftrightarrow g_r \text{ est un vecteur propre de } A_r$$

$$(\lambda_1 = 1) \longleftrightarrow g_c \text{ est un vecteur propre de } A_c$$

****

Les valeurs propres de $V_r D_c^{-1}$:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.479\,66, \lambda_3 = 5.\,310\,9 \times 10^{-2}, \lambda_4 = 5.\,997 \times 10^{-7}.$$

Les vecteurs propres de $V_r D_c^{-1}$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0.250\,99 \\ 0.650\,40 \\ 0.518\,87 \\ 0.494\,74 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0.723\,78 \\ -0.625\,73 \\ -0.248\,77 \\ 0.150\,7 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} 4.\,257\,9 \times 10^{-2} \\ -0.409\,29 \\ 0.801\,19 \\ -0.434\,47 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $V_c D_r^{-1}$:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.479\,66, \lambda_3 = 5.\,310\,9 \times 10^{-2}.$$

Les vecteurs propres de $V_c D_r^{-1}$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0.510\,48 \\ 0.648\,41 \\ 0.564\,78 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0.383\,99 \\ -0.816\,03 \\ 0.432\,02 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0.709\,33 \\ -4.\,450\,4 \times 10^{-3} \\ -0.704\,86 \end{pmatrix}.$$

2)

$$(\lambda_1 = 0) \longleftrightarrow g_r \text{ est un vecteur propre de } V_r D_c^{-1}$$

$$(\lambda_1 = 0) \longleftrightarrow g_c \text{ est un vecteur propre de } V_c D_r^{-1}$$

****

3)$V_r D_c^{-1}$:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.479\,66, \lambda_3 = 5.\,310\,9 \times 10^{-2}, \lambda_4 = 5.\,997 \times 10^{-7}.$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0.250\,99 \\ 0.650\,40 \\ 0.518\,87 \\ 0.494\,74 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0.723\,78 \\ -0.625\,73 \\ -0.248\,77 \\ 0.150\,7 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 4.\,257\,9 \times 10^{-2} \\ -0.409\,29 \\ 0.801\,19 \\ -0.434\,47 \end{pmatrix}$$

Ordonner les valeurs propres:

$$\lambda_1 = 0.479\,66, \lambda_2 = 5.\,310\,9 \times 10^{-2}, \lambda_3 = 5.\,997 \times 10^{-7}, \;\; \lambda_4 = 0.$$

Renommer les valeurs propres suivant les valeurs propres

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0.723\,78 \\ -0.625\,73 \\ -0.248\,77 \\ 0.150\,7 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 4.\,257\,9 \times 10^{-2} \\ -0.409\,29 \\ 0.801\,19 \\ -0.434\,47 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0.250\,99 \\ 0.650\,40 \\ 0.518\,87 \\ 0.494\,74 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont distrinctes et la matrice $V_r D_c^{-1}$ est D_c^{-1}-symétrique, donc les vecteurs propres sont deux-à-deux $D_c^{-1}-$orthogonaux. Il reste à normer ces vecteur par rapport à la mètrique D_c^{-1}.

$$\begin{aligned} \|u_1\|^2_{D_c^{-1}} &= u_1^t D_c^{-1} u_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.131\,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.339\,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.270\,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.258\,35 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix} \\ &= 3.\,743\,8 \end{aligned}$$

$$u_1^* := \frac{u_1}{\|u_1\|_{D_c^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{3.\,743\,8}} \begin{pmatrix} 0.256\,30 \\ 0.630\,57 \\ -0.175\,67 \\ -0.711\,22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.132\,46 \\ 0.325\,89 \\ -9.\,079\,1 \times 10^{-2} \\ -0.367\,58 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|u_2\|^2_{D_c^{-1}} &= u_2^t D_c^{-1} u_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0.723\,78 \\ -0.625\,73 \\ -0.248\,77 \\ 0.150\,7 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.131\,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.339\,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.270\,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.258\,35 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.723\,78 \\ -0.625\,73 \\ -0.248\,77 \\ 0.150\,7 \end{pmatrix} \\ &= 5.\,466\,2 \end{aligned}$$

$$u_2^* := \frac{u_2}{\|u_2\|_{D_c^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{5.4662}} \begin{pmatrix} 0.72378 \\ -0.62573 \\ -0.24877 \\ 0.1507 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0.30957 \\ -0.26764 \\ -0.1064 \\ 6.4457 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \|u_3\|^2_{D_c^{-1}} &= u_3^t D_c^{-1} u_3 \\ &= \begin{pmatrix} 4.2579 \times 10^{-2} \\ -0.40929 \\ 0.80119 \\ -0.43447 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4.2579 \times 10^{-2} \\ -0.40929 \\ 0.80119 \\ -0.43447 \end{pmatrix} \\ &= 3.6068 \end{aligned}$$

$$u_3^* := \frac{u_3}{\|u_3\|_{D_c^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{3.6068}} \begin{pmatrix} 4.2579 \times 10^{-2} \\ -0.40929 \\ 0.80119 \\ -0.43447 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2420 \times 10^{-2} \\ -0.21551 \\ 0.42187 \\ -0.22877 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \|u_4\|^2_{D_c^{-1}} &= u_4^t D_c^{-1} u_4 \\ &= \begin{pmatrix} 0.25099 \\ 0.65040 \\ 0.51887 \\ 0.49474 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.25099 \\ 0.65040 \\ 0.51887 \\ 0.49474 \end{pmatrix} \\ &= 3.6673 \end{aligned}$$

:

$$u_4^* := \frac{u_4}{\|u_4\|_{D_c^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{3.6673}} \begin{pmatrix} 0.25099 \\ 0.65040 \\ 0.51887 \\ 0.49474 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.13106 \\ 0.33963 \\ 0.27095 \\ 0.25835 \end{pmatrix}.$$

Finalement la famille de vecteurs $\{u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*\}$ forme une base $D_c^{-1}-$orthonormée de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs propres de $V_r D_c^{-1}$. Par la même methode on contruit une base, $\{u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$, $D_r^{-1}-$orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs propres de $V_c D_r^{-1}$.