T.D. $N^0 6$

Exercice $\mathbf{n^0}$ 1: On lance un dé à six faces numérotés de 1 à 6 et on note X la v.a qui représente le chiffre obtenu. Si celui-ci est pair, la v.a Y prend la valeur 1 et 0 sinon.
Calculer la variance $Var\left(X+Y\right).$

Exercice $\mathbf{n^0}$ 2 : On lance deux dés équilibrés, l'un noir et l'autre blanc, chacun ayant six faces dont deux sont marquées d'un seul point, deux de deux points et les deux autres de trois points. On note X "nombre de points sur le dé noir" Y "nombre de points sur le dé blanc"

$$R=\left|X-Y\right|,\quad S=X+Y,\quad T=\left(X+Y\right)^2,\quad U=X^2+Y^2,\quad V=\min\left(X,Y\right),\quad W=\max\left(X,Y\right)$$

1. Déterminer la loi de probabilité du couple aléatoire (X,Y).
2. En déduire celle de V et W.
3. Déduire la loi de (V,W) de celle de (X,Y) et retrouver les lois de V et W comme lois marginales.
4. Calculer $E\left(V\right)$ et $E\left(W\right)$ sans utiliser, les résultats des questions 2 et 3.
5. Exprimer R et S en fonction de V et W et en déduire $E\left(R\right)$ et $E\left(S\right)$.

Exercice $\mathbf{n^0}$ 3 : Un couple de v.a (X,Y) suit une loi de répartition de densité

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} 4xy\exp\left(-\left[x^2+y^2\right]\right), & \text{si } x>0 \text{ et } y>0 \\ 0, & \text{ailleurs}\end{cases}$$

1. Trouver les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer les densités conditionnelles de X si $Y=y$ et de Y si $X=x$.
3. Calculer $E\left(X\right),E\left(Y\right),Var\left(X\right),Var\left(Y\right).$
4. Trouver la matrice de covariance de X, et Y.

Exercice n^0 4 : Soit (X,Y) un couple aléatoire de fonction de densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = e^{-y} 1_{\mathbb{R}_+ \times [x,+\infty[}(x,y)$$

1. Donner les lois marginales des v. a X, Y.
2. Déterminer $f_{X/Y=y}$ et $f_{Y/X=x}$.
3. En déduire $E(X/Y)$ et $E(Y/X)$.

Exercice n^0 5 : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Pareto de paramètre 2 i.e. qui possèdent la densité $\rho(x) = \dfrac{1_{\{x>1\}}}{x^2}$. On pose

$$(Z,W) = \left(\ln X, 1 + \frac{\ln Y}{\ln X}\right)$$

1. Quelle est la loi de (Z,W)? Les variables Z et W sont-elles indépendantes ?
2. Quelle est la loi de W ?
3. Quelle est la loi de Z ?

Exercice n^0 6 : Soit $f(x,y)$ la densité d'un couple aléatoire (X,Y). Soit $U = X+Y$. Démontrer que la densité de la v.a U est $h(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)\,dx$.