Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Processus Stochastique 2019/2020

Solution Serie N^{0}04

Exercice 01. (Solution)

1) On a

$$E\left[B_sB_t^2\right] = E\left[E\left[B_sB_t^2|F_s\right]\right].$$

La variable B_s est F_s-mesurable, d'ou, si $t > s$,

$$E\left[B_sB_t^2\right] = E\left[B_sE\left[B_t^2|F_s\right]\right].$$

On sait que $B_t^2 - t$ est une martingale, d'ou $E(B_t^2|F_s) = B_s^2 - s + t$. En utilisant que B_t est centré et que $E(B_t^3) = 0$, on obtient que

$$\begin{aligned} E\left[B_s\left(B_s^2 - s + t\right)\right] &= E\left[B_s^3\right], \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $s > t$, on a

$$E(B_sB_t^2) = E(E(B_sB_t^2|F_t)) = E(B_t^2E(B_s|F_t)) = E(B_t^3) = 0.$$

Le MB est une martingale, donc $E(B_t|F_s) = B_s$ pour $t \geq s$ et $E(B_t|F_s) = B_s$ pour $t < s$ car B_t est F_s-mesurable dans ce cas. Si $s < t$,

$$E(Bt|Bs) = E(Bt - Bs + Bs|Bs) = E(Bt - Bs|Bs) + Bs = Bs$$

car $B_t - B_s$ est indépendant de B_s et centré. Si $t < s$, on s'inspire du pont Brownien pour écrire $E(B_t|B_s) = E(B_t - \frac{t}{s}B_s|B_s) + \frac{t}{s}B_s$. La v.a. $B_t - \frac{t}{s}B_s$ est centrée et indépendante de B_s: en effet, le couple $(B_t - \frac{t}{s}B_s, B_s)$ est un couple gaussien centré et sa covariance est nulle. On en déduit $E(B_t|B_s) = \frac{t}{s}B_s$.

2) La variable $B_t + B_s$ est gaussienne (car B est un processus gaussien) centrée. On peut aussi écrire $(B_t + B_s)$ comme une somme de v.a. gaussiennes indépendantes: $B_t + B_s = B_t - B_s + 2B_s$. On en déduit que sa variance est $t + 3s$.

3) Soit θ_s une variable aléatoire bornée F_s-mesurable. On a, pour $s \leq t$

$$E(\theta_s(B_t - B_s)) = E(E(\theta_s(B_t - B_s)|Fs)) = E(\theta_sE((B_t - B_s)|F_s)) = 0.$$

De même

$$E(\theta_s(B_t - B_s)^2) = E(E(\theta_s(B_t - B_s)^2|Fs)) = E(\theta_sE((B_t - B_s)^2|F_s)) = (t - s)E(\theta_s).$$

Exercice 02.(Solution)

1) Le processus M est F-mesurable. M_t est intégrable: $E(|B_t^3|) = Ct^{\frac{3}{2}}$, ou C est une constante et

$$E|\int_0^t B_s ds| \leq \int_0^t E(|B_s|)ds = \int_0^t \sqrt{\frac{2s}{\pi}} ds < \infty.$$

En utilisant que, pour $t > s$, la v.a. $B_t - B_s$ est indépendante de F_s, on obtient

$$E(B_t^3|F_s) = E((B_t - B_s + B_s)^3|F_s) = E((B_t - B_s)^3) + 3B_s E(B_t - B_s)^2 + 3B_s 2E(B_t - B_s) + B_s^3.$$

d'ou

$$E(B_t^3|F_s) = 3B_s(t-s) + B_s^3.$$

D'autre part

$$E(\int_0^t B_u du|F_s) = \int_0^t E(B_u|F_s)du = \int_0^t E(B_u|F_s)du + \int_0^t E(B_u|F_s)du = \int_0^t B_u du + B_s(t-s).$$

La propriété de martingale est alors facile á vérifier.

2) Des calculs analogues montrent que $B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale. Il suffit de montrer que pour $s < t$, $E(B_t^3 - 3tB_t|F_s) = B_s^3 - 3sB_s$. Or, en utilisant que $B_t - B_s$ est indépendant de F_s, on obtient

$$E((B_t - B_s)^3|F_s) = E((B_t - B_s)^3) = 0$$

car $E(X^3) = 0$ si X est une variable gaussienne centrée. Il reste a utiliser $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ pour obtenir

$$\begin{aligned} E((B_t - B_s)^3|F_s) &= E(B_t^3|F_s) - 3B_s E(B_t^2|F_s) + 3B_s 2E(B_t|F_s) - B_s \\ &= E(B_t^3|F_s) - 3B_s(B_s^2 - s + t) + 3B_s^2 B_s - B_s^3. \end{aligned}$$

Le processus $B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale, donc par différence $tB_t - \int_0^t B_s ds$ est une martingale, égale (intégration par parties) a $\int_0^t s dB_s$.

3) La v.a. X_t est F_t mesurable et intégrable : en effet $|X_t| \leq t|B_t| + \int_0^t |B_s| ds = Z$ et il est facile de vérifier que Z est intégrable (soit $E(Z) < \infty$, car$E(|Bt|) = \dfrac{2t}{\sqrt{2\pi}}$).

Soit $t > s$.

$$\begin{aligned} E(X_t|F_s) &= E(tB_t - \int_0^t B_u du|F_s) = tE(B_t|F_s) - \int_0^t E(B_u|F_s)du, \\ &= tB_s - \int_0^t B_u du - \int_s^t B_s du = tB_s - \int_0^s B_u du - B_s(t-s), \\ &= -\int_0^s B_u du + B_s s = X_s. \end{aligned}$$

le processus X est une martingale.

4) Soit $t > s$

$$\begin{aligned} E(Y_t|F_s) &= E(t^2 B_t - 2\int_0^t B_u du|F_s) = t^2 E(B_t|F_s) - 2\int_0^t E(B_u|F_s)du, \\ &= t^2 B_s - 2\int_0^s B_u du - 2\int_s^t B_s du = t^2 B_s - 2\int_0^s B_u du - 2B_s(t-s), \\ &= Y_s + (t^2 - s^2)B_s - 2B_s(t-s). \end{aligned}$$

Pour que Y soit une martingale, il faudrait que

$$(t^2 - s^2)B_s - 2B_s(t-s) = (t-s)B_s(t+s-2) = 0,$$

ce qui n'est pas.

Exercice 03.(Solution)

1) Notons que $\frac{1}{\sqrt{2}}(B_1+B_2)$ est un processus gaussien de covariance $t\wedge s$, donc un mouvement Brownien et par suite $\frac{1}{2}(B_1(t)+B_2(t))^2-t$ est une martingale. Comme

$$\frac{1}{2}(B_1(t)+B_2(t))^2-t=\frac{1}{2}(B_1^2(t)-t)+\frac{1}{2}(B_2^2(t)-t)+B_1(t)B_2(t),$$

le résultat suit.

2) Soit $Y_t=\int_0^t B_u du$. Le processus Y est défini trajectoire par trajectoire, comme intégrale de Riemann d'une fonction continue. En particulier, on a $dY_t=B_t dt$. Le processus Y est un processus gaussien. Tout d'abord, Y_t est une gaussienne comme limite de sommes de Riemann qui sont des gaussiennes car B est un processus gaussien. Le caractère gaussien du processus s'obtient par un raisonnement analogue. On a

$$E(Y_t)=\int_0^t E(B_u)du=0.$$

La covariance de Y est $E(Y_tY_s)=\int_0^t du\int_0^s dvE(B_uB_v)$.

Il reste a intégrer $\int_0^t du\int_0^s dv(u\wedge v)$. On se place dans le cas $s<t$ et il vient

$$\begin{aligned} E(Y_tY_s) &= \int_0^s du\int_0^s (v\wedge u)dv+\int_s^t du\int_0^s (v\wedge u)dv \blacksquare \\ &= \int_0^s du\left(\int_0^u vdv+\int_u^s udv\right)+\int_s^t du\int_0^s vdv. \end{aligned}$$

Tous calculs faits, pour $s<t: E(Y_tY_s)=\dfrac{s^2}{6}(3t-s)$.

3) Par définition de l'intégrale de Riemann, toute combinaison linéaire $\sum_i a_iZ_{t_i}$ est limite dans L_2 de sommes du type $\sum_j a_jZ_{t_j}$, d'où le caractère gaussien. (Attention, il ne faut pas se contenter de dire que Z est la somme de deux processus gaussiens. La somme de deux v.a. gaussiennes n'est pas n´ecessairement une gaussienne. Cette propriété est vraie si les variables sont indépendantes). On utilise ici que

$$\int_0^s \frac{B_s}{s}ds=\lim_{n\to}\sum_{i=0}^n \frac{B_{t_i}}{t_i}(t_{i+1}-t_i).$$

Pour caractériser la loi du processus gaussien Z, il suffit de donner son espérance et sa covariance. Il est immédiat de montrer que $E(Z_t)=0$. Il reste à calculer la covariance. Soit
$s<t$.

$$E(Z_sZ_t)=E(B_sB_t)-E\left[\int_0^t \frac{B_sB_u}{u}du\right]-E\left[B_t\int_0^s \frac{B_u}{u}du\right]+E\left[\int_0^t \frac{B_u}{u}du\int_0^s B_v vdv\right]$$

On utilise que $E(\int_a^b f(B_u)du)=\int_a^b E[f(B_u)]du$ et que $E(B_uB_v)=u\wedge v)$.

Après quelques calculs d'intégration sur les intégrales doubles, il vient $E(Z_sZ_t)=s$. Le processus Z est un processus gaussien d'espérance nulle et de covariance $s\wedge t$.

Exercice 04.(Solution)
Soit

$$Z_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} [B(t_j) - B(t_{j-1})]^2.$$

Pour établuir la convergence en moyenne quadratique, on doit montrer que $E((Z_t^n - t)^2) \to 0$, soit, puisque $E(Z_t^n) = t$, $Var(Z_t^n) \to 0$ ce qui se déduit

$$\begin{aligned} Var(Z_t^n) &= \sum_{j=1}^{2^n} Var[B(t_j) - B(t_{j-1})]^2, \\ &= \sum_{j=1}^{2^n} 2\left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = 2^{n+1}\left(\frac{t}{2^n}\right)^2. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé que si X est de loi $N(0,\sigma^2)$, la variance de X^2 est $2\sigma^4$). On en déduit que

$$E(\sum_{n=1}^{\infty}(Z_t^n - t)^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2^n} < \infty.$$

D'où $\sum_{n=1}^{\infty}(Z_t^n - t)^2 < \infty$ et le terme général de la série converge *p.s.* vers 0.

Exercice 05.(Solution)

1) Le processus $(Z_t = B_t - tB_1, 0 \leq t \leq 1)$ est un processus gaussien car pour tout choix de (a_i, t_i)

$$\sum a_i Z_{t_i} = \sum a_i B_{t_i} - (\sum a_i t_i) B_1$$

est une v.a.r. gaussienne (B est un processus gaussien). De la même facon, on obtient que le vecteur (Z_t, B_1) est gaussien. Ses deux composantes Z_t et B_1 sont indépendantes car

$$E(Z_t B_1) = E(B_t B_1) - tE(B_1^2) = 0.$$

La covariance de Z est

$$E(Z_t Z_s) = E(B_s B_t) - sE(B_1 B_t) - tE(B_s B_1) + tsE(B_1^2) = (s \wedge t) - st.$$

On appelle Z un pont Brownien.

2) Le processus $(Y_t = Z_{1-t}, 0 \leq t \leq 1)$ est gaussien centré. Sa covariance est, pour $s \leq t$,

$$E(Y_t Y_s) = (1-t) \wedge (1-s) - (1-s)(1-t) = (s \wedge t) - st = s(1-t).$$

3) Soit $Y_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$. Le processus Y est un processus gaussien car $\sum a_i Z_{t_i} = \sum b_i B_{s_i}$. On a $E(Y_t) = 0$ et pour $s < t$

$$E(Y_s Y_t) = (1-t)(1-s)E(B_{\frac{t}{1-t}} B_{\frac{s}{1-s}}) = (1-t)(1-s)\frac{s}{1-s} = s\,(1-t)\,.$$