Les équations différentielles

Equation différentielle

Défintion 1:
Une équation différentielle est une relation entre la variable réelle x, et une fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées $y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}$ au point x définie par:

$$F(x, y(x), y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

(et on peut la noter par $F(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}) = 0$) $\quad *$
Exemple
$y^{''} + 3y = 0$, $y^{'} + 2xy^3 - 5 = 0$ sont des équations différentielles.
Défintion 2:
On appelle ordre d'une équation différentielle le plus grand ordre de la dérivée existant dans l'équation différentielle.
Exemple
$y^{''} + 3y = e^x$, $y^{'} + 2xy^3 - 5 = 0$ sont des équations différentielles du second ordre et du 1er ordre respectivement.
Défintion 3:
On appelle solution générale ou intégrale d'une équation différentielle toute fonction $y = f(x)$ vérifiant l'équation $*$.
Exemple:
Vérifier que la fonction $y = \cos x$ est une solution de l'équation différentielle

$$y^{''} + y = 0 \quad (1)$$

On a $y^{'} = -\sin x$ et $y^{''} = -\cos x$,
d'où $y^{''} + y = -\cos x + \cos x = 0$, alors $y = \cos x$ est une solution de l'équation différentielle (1).
On peut vérifier que les fonctions $y = c_1 \sin x,\ y = c_2 \cos x$ sont des solutions de l'équation différentielle (1) et la solution générale de (1) est $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.
Avant d'entammer le cours des équations différentielles on va faire un rappel sur les intégrales.

Les intégrales

1) Intégrale définie

Définition
L'intégration définie est liée au problème du calcul d'une surface délimité par la courbe d'une fonction $f(x)$ et les droites perpendiculaires $x = a$ et $x = b$ et l'axe abscisses (ox), et on note $\int_a^b f(x)\,dx$,et on dit que la fonction f est intégrable sur $[a, b]$.

Théorème:
Toute fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ est intégrable sur cet intervalle..
Théorème:
Toute fonction monotone sur l'intervalle $[a,b]$ est intégrable .

Propriétés de l'intégrale définie

Supposons que toutes ces intégrales existent, alors:

1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$. 2) $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$,

3) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$, où $c \in [a,b]$.

4) $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

5) Si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ alors $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

6) Si $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ alors $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

7) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \geq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

8) Si $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$, alors $m \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M$.

9) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(y)\,dy$.......

Primitive d'une fonction

Définition:
On appelle primitive d'une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ toute fonction φ définie et dérivable sur $[a,b]$ telle que $\varphi'(x) = f(x)$ et on écrit
$\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$.

Relation fondamentale du calcul de l'intégrale définie:

Supposons qu'elle existe une autre fonction primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$ alors $\varphi(x) = F(x) + c$.

On a $\varphi(a) = \int\limits_a^a f(t)\,dt = 0$ donc $c = -F(a)$ et $\varphi(x) = F(x) - F(a)$, d'où pour $x = b$ on a $\varphi(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Exemple:

La fonction $\sin x$ est la primitive de la fonction $\cos x$, et toutes les fonctions $\sin x + c$ ($c \in \mathbb{R}$) sont des primitives de la fonction $\cos x$, et

$\int\limits_a^b \cos t dt = \sin b - \sin a.$

2) Intégrale indéfinie

Définition:

La primitive d'une fonction $f(x)$ est la fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$, et cette primitive n'est pas unique

Exemple:

$x^2 + c$ est la primitive de la fonction $2x$ où c est une constante.

Si la fonction f est une fonction continue alors elle admet une infinité de primitives.

Définition:

On appelle la recherche d'une primitive $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ est l'intégration indéfinie

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$, où x est la variable de l'intégration.

Propriétés de l'intégrale indéfinie

1) $y = \int f(x)\,dx \Rightarrow dy = f(x)\,dx$.

2) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$, 3) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

4) $\int f'(x)\,dx = \int df(x) = f(x) + c$ où c est une constante.

Intégrales de fonctions élémentaires

1) $\int g^n(x)\,dg(x) = \dfrac{g^{n+1}(x)}{n+1} + c$, où $n \in \mathbb{R}$, et $n \neq -1$

Exemple:

Calculer les intégrales suivantes: $\int x\left(x^2+2\right)^3 dx$, $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x} dx$

Posons $g(x) = \left(x^2+2\right) \Rightarrow dg(x) = g'(x)\,dx = 2xdx$

donc $\int x\left(x^2+2\right)^3 dx = \dfrac{1}{2}\int (g(x))^3\,dg(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{g^4(x)}{4} + c = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(x^2+2\right)^4}{4} + c$

Posons $g(x) = \ln x \Rightarrow dg(x) = g'(x)\,dx = \dfrac{dx}{x}$

donc $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x} dx = \dfrac{(\ln x)^3}{3} + c.$

2) $\int \dfrac{dg(x)}{g(x)} = \ln|g(x)| + c$

Exemple:

Calculer les intégrales suivantes: $\int \frac{dx}{4x+1}$, $\int \frac{\sin x dx}{\cos x + 2}$

Posons $g(x) = 4x+1 \Rightarrow dg(x) = g'(x)\, dx = 4dx$

donc $\int \frac{dx}{4x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dg(x)}{g(x)} = \frac{1}{4}\ln|4x+1| + c.$

Posons $g(x) = \cos x + 2 \Rightarrow dg(x) = g'(x)\, dx = -\sin x dx$

donc $\int \frac{\sin x dx}{\cos x + 2} = -\ln|\cos x + 2| + c.$

3) $\int \cos(g(x))\, dg(x) = \sin g(x) + c.$

4) $\int \sin(g(x))\, dg(x) = -\cos g(x) + c.$

Exemple:

Calculer les intégrales suivantes: $\int \cos(5x+1)\, dx$, $\int x \sin\left(x^2+1\right) dx$

$\int \cos(5x+1)\, dx = \frac{1}{5}\sin(5x+1) + c$

Posons $g(x) = \left(x^2+1\right) \Rightarrow dg(x) = g'(x)\, dx = 2x dx$

donc $\int x \sin\left(x^2+1\right) dx = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right) + c.$

5) $\int \tan(g(x))\, dg(x) = -\ln|\cos(g(x))| + c.$

6) $\int \cot(g(x))\, dg(x) = \ln|\sin(g(x))| + c.$

Exemple:

Calculer l'intégrale suivante: $\int \frac{\tan(\sqrt{x})}{3\sqrt{x}} dx$

$\int \frac{\tan(\sqrt{x})}{3\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{3}\ln|\cos\sqrt{x}| + c.$

7) $\int a^{g(x)} dg(x) = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + c$,tel que $a > 0$ et $a \neq 1$

Exemple:

Calculer les intégrales suivantes: $\int a^{3x} dx$, $\int x e^{-x^2} dx$

$\int a^{3x} dx = \frac{a^{3x}}{3\ln a} + c.$

Posons $g(x) = -x^2 \Rightarrow dg(x) = g'(x)\, dx = -2x dx$

donc $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{-1}{2} e^{-x^2} + c.$

8) $\int \frac{dg(x)}{g^2(x) + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{g(x)}{\alpha} + c.$

Exemple:

Calculer l'intégrale suivante: $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

Posons $g(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow dg(x) = g'(x)\,dx = dx$

donc $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c =$

$\displaystyle\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + c.$

8) $\displaystyle\int \frac{dg(x)}{g^2(x)-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \ln \left|\frac{g(x)-\alpha}{g(x)+\alpha}\right| + c$, et $\displaystyle\int \frac{dg(x)}{\alpha^2-g^2(x)} =$
$\displaystyle\frac{1}{2\alpha} \ln \left|\frac{g(x)+\alpha}{g(x)-\alpha}\right| + c.$

Exemple:

Calculer l'intégrale suivante: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x-4}$

$$\int \frac{dx}{x^2+3x-4} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}$$

Posons $g(x) = \left(x+\frac{3}{2}\right) \Rightarrow dg(x) = g'(x)\,dx = dx$

donc $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x-4} = \int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}} =$

$\displaystyle\frac{1}{2\frac{5}{2}} \ln \left|\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\right)}\right| + c = \frac{1}{5} \ln \left|\frac{x-1}{x+4}\right| + c.$

Changement de variable

Si le calcul de $\int f(x)\,dx$ n'est pas immédiat, le résultat peut être obtenu en changeant la variable x en la variable t à l'aide de la transformation $x = \varphi(t)$ et l'intégrale devient $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

Exemple: Calculer l'intégrales suivante: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$.

Posons $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$ et $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$ devient

$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1} = \int \frac{2t^2 dt}{t^2+1} = 2\int \frac{\left(t^2+1-1\right)dt}{t^2+1} =$
$2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2\arctan t + c.$

Intégration par partie

La méthode d'intégration par partie est basée sur la formule de la différentielle du produit de deux fonctions d'une variable : $u(x) = u$ et $v(x) = v$.
Supposons que $f(x) = u(x)\,dv(x)$ où les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables en x. On a $du(x) = u^{'}(x)\,dx$, $dv(x) = v^{'}(x)\,dx$ et $d(uv) = udv + vdu$ alors
$\int f(x)\,dx \ = \int (u(x)\,dv(x))\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x) \ = uv - \int vdu.$

Quelques exemples d'intégrales par partie

Calculer les intégrales suivantes
1) $\int x\ln x dx$

Posons $u = \ln x$ et $dv = xdx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ et $v = \frac{x^2}{2}$,
donc $\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c.$
En géneral on utilise la méthode d'intégration par partie pour calculer les intégrales $\int x^n \ln x dx$, où $n \in \mathbb{R}$ en prenant
$u = \ln x$ et $dv = x^n dx$.
2) $\int xe^{3x}dx$

Posons $u = x$ et $dv = e^{3x}dx \Rightarrow du = dx$ et $v = \frac{e^{3x}}{3}$,
donc $\int xe^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \int \frac{e^{3x}}{3}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + c.$
En géneral on utilise la méthode d'intégration par partie pour calculer les intégrales $\int x^{\alpha} e^{\beta x}dx$, où $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ en prenant
$u = x^{\alpha}$ et $dv = e^{\beta x}dx$.
3) $\int e^x \cos 2x dx$

Posons $u = e^x$ et $dv = \cos 2x dx \Rightarrow du = e^x dx$ et $v = \frac{\sin 2x}{2}$,
donc $\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x}{2}\sin 2x - \int \frac{e^x \sin 2x}{2}dx.$
On utilise la méthode d'intégration par partie une autre fois
Posons $u = e^x$ et $dv = \frac{\sin 2x}{2}dx \Rightarrow du = e^x dx$ et $v = \frac{-\cos 2x}{4}$,
$\int \frac{e^x \sin 2x}{2}dx = \frac{-e^x}{4}\cos 2x + \int \frac{e^x \cos 2x}{4}$, d'où

$\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x}{2} \sin 2x + \frac{e^x}{4} \cos 2x - \int \frac{e^x \cos 2x}{4} dx,$

et $\int e^x \cos 2x dx = \frac{4}{5} \left(\frac{e^x}{2} \sin 2x + \frac{e^x}{4} \cos 2x \right) + c$

En général on utilise la méthode d'intégration par partie pour calculer les intégrales $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$, où $\left(\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx \right)$ avec $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^*$ en prenant $u = e^{\alpha x}$ et $dv = \cos \beta x dx$ où $(\sin \beta x dx)$.

4) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

$\arcsin x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x - \int x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Calculons l'intégrale $\int x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ par la méthode de l'intégration par partie en posant $u = x$ et $dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow du = dx$ et $v = -\sqrt{1-x^2}$,

donc $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx,$

d'où $\int \sqrt{1-x^2} dx = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx$

$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + c$

Remarque

On calcule toujours les intégrales $\left(\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx,\ \text{où } n \in \mathbb{N} \right)$,

par la méthode de l'intégration par partie en posant

$u = x^{n+1}$ et $dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow du = (n+1) x^n dx$ et $v = -\sqrt{1-x^2}$.

5) $\int x \arcsin x dx$

Posons $u = \arcsin x$ et $dv = x dx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ et $v = \frac{x^2}{2}$,

donc $\int x \arcsin x dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} dx =$

$\frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \left(-x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx \right) + c$

On calcule toujours les intégrales $\left(\int x^n \arcsin x dx,\ \text{où } n \in \mathbb{N} \right)$,

par la méthode de l'intégration par partie en posant

$u = \arcsin x$ et $dv = x^n dx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ et $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, d'où

$\int x^n \arcsin x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x - \int \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

$\frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x - \int \frac{x^n}{(n+1)} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

On utilise la même méthode pour le calcul de $\left(\int x^n \arccos x dx, \text{ où } n \in \mathbb{N} \right)$,

6) $\int x \arctan x dx$

Posons $u = \arctan x$ et $dv = x dx \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$ et $v = \frac{x^2}{2}$,

donc $\int x \arctan x dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx$

Calculons $\int \frac{x^2}{(1+x^2)} dx$

$\int \frac{x^2}{(1+x^2)} dx = \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)} dx = \int dx - \int \frac{1}{(1+x^2)} dx = x - \arctan x,$

d'où $\int x \arctan x dx = \left(\frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} (x - \arctan x) \right) + c.$

7) $\int x \cos x dx$

Posons $u = x$ et $dv = \cos x dx \Rightarrow du = dx$ et $v = \sin x$,

donc $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$

On calcule toujours les intégrales $\left(\int x^n \sin x dx, \text{ où } \int x^n \cos x dx, \quad n \in \mathbb{N}^* \right)$,
par la méthode de l'intégration par partie en posant
$u = x^n$ et $dv = \sin x dx$ où $dv = \cos x dx \Rightarrow du = n x^{n-1} dx$ et $v = -\cos x$,
où $v = \sin x$, et on recommence par la même méthode jusqu'on arrive à
$\int x \sin x dx$ où $\int x \cos x dx$.

Intégrale de fonctions rationnelles

Calcul des intégrales de la forme $\int R(x)\, dx$, $R(x)$ est une fonction rationnelle qui s'écrit de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, et en supposant que ces polynômes n'ont pas de racines communes, donc on a deux cas:

1er Cas: degrés de $P(x) <$ degrés de $Q(x)$, alors

1) Si $Q(x) = (x-a)^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, alors on peut écrire $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la forme:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_m}{(x-a)^m} + \frac{\alpha_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + ... + \frac{\alpha_1}{(x-a)},$

où $\alpha_m, \ \alpha_{m-1}, \ ..., \alpha_1$ sont des constantes réelles à déterminer.

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{\alpha_m}{(x-a)^m} dx + \int \frac{\alpha_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} dx + ... + \int \frac{\alpha_1}{(x-a)} dx =$

$\alpha_m \frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + \alpha_{m-1} \frac{1}{(2-m)(x-a)^{m-2}} + ... + \alpha_1 \ln|x-a| + c$

Exemple: Calculer les intégrales suivantes

$\int \frac{4}{(x-2)}dx$, $\int \frac{3}{(x+1)^2}dx$, $\int \frac{(x^2+1)}{(x-1)^3}dx$

$\int \frac{4}{(x-2)}dx = 4\ln|x-2| + c$, alors $\int \frac{A}{(x-a)}dx = A\ln|x-a| + c$

$\int \frac{3}{(x+1)^2}dx = \frac{-3}{x+1} + c$,

alors $\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + c$,

où m est un nombre naturel ≥ 2

La fraction $\frac{(x^2+1)}{(x-1)^3}$ peut être décomposée de la manière suivante:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3} = \frac{\alpha_3}{(x-1)^3} + \frac{\alpha_2}{(x-1)^2} + \frac{\alpha_1}{(x-1)}, \qquad (\mathbf{E})$$

Pour trouver les constantes α_1, α_2, α_3, on utilise une méthode simple qui est la suivante:

On voit que $Q(x) = (x-1)^3$ s'annule au point $x = 1$.

Commençant par α_3 : On multiplie les deux cotés de l'équation ($\mathbf{E}$) par $(x-1)^3$ et puis on remplace x par 1, on trouve $\alpha_3 = 2$.

Pour trouver α_1, α_2 on remplace x dans l'équation ($\mathbf{E}$) par n'importe quel nombre réel différent de 1, par exemple on prend $x = 0$ et $x = 2$, on trouve respectivement les équations $-$

$1 = -2 + \alpha_2 - \alpha_1$ et $5 = 2 + \alpha_2 + \alpha_1$, d'où $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 2$

$$\int \frac{(x^2+1)}{(x-1)^3}dx = \int \frac{2}{(x-1)^3}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{(x-1)}dx =$$

$$-2\frac{1}{2(x-1)^2} - 2\frac{1}{(x-1)} + \ln|x-1| + c.$$

2) Si $Q(x) = (x-a)^p (x-b)^q$,

alors on peut écrire $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la forme:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_p}{(x-a)^p} + \frac{\alpha_{p-1}}{(x-a)^{p-1}} + ... + \frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\beta_q}{(x-b)^q} +$$

$$\frac{\beta_{q-1}}{(x-b)^{q-1}} + ... + \frac{\beta_1}{(x-b)}$$, alors

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{\alpha_p}{(x-a)^p}dx + \int \frac{\alpha_{p-1}}{(x-a)^{p-1}}dx + ... + \int \frac{\alpha_1}{(x-a)}dx +$$

$$\int \frac{\beta_q}{(x-b)^q}dx + \int \frac{\beta_{q-1}}{(x-b)^{q-1}}dx + ... + \int \frac{\beta_1}{(x-b)}dx$$

Exemple

Calculer $\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx$

La fraction $\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}$ peut être décomposée de la manière suivante:

$\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{(x-1)} + \dfrac{C}{(x+2)}.\ *$

Pour trouver les constantes A, B, et C on met les fractions au dénominateur commun et égalons les numérateurs, ou on utilise la méthode suivante:

Pour trouver A on multiplie les deux cotés de l'égalité $*$ par $(x-1)^2$, et puis on remplace x par 1, alors $A = \dfrac{2}{3}$

Pour trouver C on multiplie les deux cotés de l'égalité $*$ par $(x+2)$, et puis on remplace x par -2, alors $C = \dfrac{-1}{9}$.

Pour trouver B on remplace x dans les deux cotés de l'égalité $*$ par n'importe quel nombre réel différent de 1 et -2, par exemple prenant $x = 0$.

On trouve l'équation suivante: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3} - B - \dfrac{1}{18}$, d'où $B = \dfrac{1}{9}$.

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx = \int \frac{2}{3(x-1)^2}dx + \frac{1}{9}\int \frac{1}{(x-1)}dx - \frac{1}{9}\int \frac{1}{(x+2)}dx =$$

$$\frac{-2}{3(x-1)} + \frac{1}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9}\ln|x+2| + c\ .$$

3) Si $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{Ax+B}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$, où les racines du dénominateur sont complexes.

Exemple

Calculer $\displaystyle\int \frac{x-2}{3x^2+4x+2}dx$

On voit que les racines du dénominateur $3x^2+4x+2$ sont complexes, et la dérivée de $3x^2+4x+2$ est $6x+4$,alors on peut écrire la fraction $\dfrac{x-2}{3x^2+4x+2}$ de la forme:

$$\frac{x-2}{3x^2+4x+2} = \frac{1}{6}\left(\frac{6x+4}{3x^2+4x+2}\right) - \frac{8}{3(3x^2+4x+2)},\ \text{donc}$$

$$\int \frac{x-2}{3x^2+4x+2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+2}dx - \frac{8}{3}\int \frac{1}{\left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3}}dx =$$

$$\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+4x+2\right| - \frac{8}{3}\int \frac{1}{\left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3}}dx.$$

Calculons maintenant cette dernière intégrale:

Posons $g(x) = \left(\sqrt{3}x + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow dg(x) = \sqrt{3}dx$,

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3}}dx =$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\arctan\frac{\left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + c,\ \text{donc}$$

$$\int \frac{x-2}{3x^2+4x+2}dx = \frac{1}{6}\ln\left|3x^2+4x+2\right| - \frac{8}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

4) Si $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x)}{(x-a)^m(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}$, où les racines du dénominateur sont complexes.

Exemple

Calculer $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$

On voit que les racines du dénominateur x^2+2x+2 sont complexes.

alors la fraction $\dfrac{x^3+4}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$ peut être décomposée de la manière suivante: $\dfrac{x^3+4}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} = \dfrac{A}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{(x+1)} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+2x+2)} \quad *$

Pour trouver les costantes A, B, C et D, on met les fractions au dénominateur commun et égalons les numérateurs.ou on utilise la méthode suivante:

Pour trouver A on multiplie les deux cotés de l'égalité $*$ par $(x+1)^2$, et puis on remplace x par -1, alors $A = 3$

Pour trouver B, C et D on remplace x dans les deux cotés de l'égalité $*$ par trois nombres réels différents de -1

Si on pose par exemple $x = 0, x = 1,\ x = -2$ nous trouvons un système d'équations

$$2 = 3 + B + \frac{D}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{B}{2} + \frac{C+D}{5}$$

$$-2 = 3 - B + \frac{-2C+D}{2}$$

Les solutions de ce système est: $B = 3,\ C = -2$ et $D = -8$.

Donc $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx = \int \frac{3}{(x+1)^2}dx + \int \frac{3}{(x+1)}dx - \int \frac{2x+8}{(x^2+2x+2)}dx.$

Puisque la dérivée de x^2+2x+2 est $2x+2$,

$$\int \frac{2x+8}{(x^2+2x+2)}dx = \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)}dx + \int \frac{6}{(x+1)^2+1}dx =$$

$$\ln\left(x^2+2x+2\right) + 6\arctan(x+1) + c$$

$$\int \frac{x^3+4}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx = \frac{-3}{(x+1)} + 3\ln|x+1| - \ln\left|x^2+2x+2\right| -$$

$$6\arctan(x+1) + c\ .$$

2$^{\text{ème}}$ Cas: degrés de $P(x) \geq$ degrés de $Q(x)$, alors

En utilisant la division Euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ suivant les puissances décroissantes, on peut représenter la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$comme la somme d'un polynôme et d'une fraction

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{Q(x)},$$

où $B(x)$ est un polynôme de degrés $<$ degrés de $Q(x)$.

Exemple

Calculer $\int \frac{x^4+1}{x^2+x-2}dx$

On a d'aprés la division Euclidienne de x^4+1 par x^2+x-2 suivant les puissances décroissantes:

$\frac{x^4+1}{(x^2+x-2)} = x^2-x+3+\frac{-5x+7}{x^2+x-2}$, d'où

$$\int \frac{x^4+1}{x^2+x-2}dx = \int \left(x^2-x+3\right)dx + \int \frac{-5x+7}{x^2+x-2}dx$$

On a $\frac{-5x+7}{x^2+x-2} = \frac{-5}{2}\frac{2x+1}{x^2+x-2} + \frac{19}{2\left(x^2+x-2\right)}$

$$\int \frac{-5x+7}{x^2+x-2}dx = \frac{-5}{2}\ln\left|x^2+x-2\right| + \frac{19}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}dx =$$

$$\frac{-5}{2}\ln\left|x^2+x-2\right| + \frac{19}{2}\frac{1}{2\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}\right| dx = \frac{-5}{2}\ln\left|x^2+x-2\right| + \frac{19}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$$

donc $\int \frac{x^4+1}{x^2+x-2}dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{-5}{2}\ln\left|x^2+x-2\right| + \frac{19}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)}\right| + c$