

2. MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

2.1 Définition

Une matrice $n \times m$ est un tableau rectangulaire de nombres (réels en général) à n lignes et m colonnes ; n et m sont les *dimensions* de la matrice.

Notation.

Si A est une matrice, la notation suivante est très utile pour désigner ses entrées :

$$A=[a_{ij}],$$

où a_{ij} est le nombre se trouvant à la rangée i et à la colonne j .

Exemple. Matrice 3×2 :

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, c'est une matrice 3×2 ; les dimensions n et m sont respectivement égales à 3 et 2. ◆

Si la matrice a une seule colonne ($m=1$) et n lignes, elle se réduit à un vecteur de \mathbb{R}^n .

Si les deux dimensions sont égales ($m=n$), la matrice est dite *carrée*.

La matrice *transposée* A^T de la matrice $A=[a_{ij}]$ est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes : $A^T=[a_{ji}]$.

En prenant la matrice A précédente :

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Une matrice carrée est *symétrique* si elle est égale à sa transposée. Par exemple, la

matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ est symétrique car $a_{ij}=a_{ji}$ pour tous i,j entre 1 et 3.

2.2 Opérations sur les matrices

1. Addition, soustraction et multiplication par un réel

On peut réaliser des opérations élémentaires sur les matrices comme l'addition, la soustraction ou la multiplication par un nombre réel.

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ alors :

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 8 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il faut que $A=[a_{ij}]$ et $B=[b_{ij}]$ aient les mêmes dimensions (dans ce cas, $n=3$ et $m=2$). La formule générale pour $C=A+B$ est :

$$C=[a_{ij} + b_{ij}].$$

Si k est un scalaire, on a :

$$kA=[k \cdot a_{ij}].$$

Par exemple, si $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ alors $3A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & -6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$.

L'élément neutre de l'addition est la **matrice nulle** dont tous les éléments sont des zéros.

2. Produit matriciel

On définit le produit matriciel de deux matrices de la manière suivante :

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ alors :

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En général, étant données les matrices $A=[a_{ij}]$ et $B=[b_{ij}]$, posant $AB=[m_{ij}]$ on a :

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Pour que le produit matriciel soit possible, il faut que les dimensions des matrices soient compatibles, c'est-à-dire il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de

lignes de B. En terme de dimension, si la matrice A est une matrice $n \times m$ et la matrice B est une matrice $m \times p$, la matrice $C = AB$ est une matrice $n \times p$.

Le produit matriciel a les propriétés suivantes :

- associativité : $(AB)C = A(BC)$;
- distributivité: $A(B+C) = AB + AC$;
- transposée : $(AB)^T = B^T A^T$;
- **non commutativité : AB est différent de BA pour A et B quelconques.**

Comme les vecteurs sont des matrices à une colonne, on peut définir le produit matriciel de 2 vecteurs $\mathbf{v}^T \mathbf{w}$ dont le résultat est un nombre réel (on peut vérifier qu'au niveau des dimensions, il n'y a pas de problème car \mathbf{v}^T a pour dimensions $(1, n)$ et \mathbf{w} a pour dimensions $(n, 1)$). Ce produit matriciel est appelé **produit scalaire** de deux vecteurs. Le produit scalaire $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$ est égal au carré de la norme (longueur) du vecteur \mathbf{v} .

3. Matrice identité et matrice orthogonale

En se limitant à des matrices carrées, on peut définir un élément neutre du produit matriciel. Cet élément neutre est appelé **matrice identité** ; il est habituellement noté I et est tel que $AI = IA = A$. La matrice identité est une matrice diagonale qui a des 1 sur la diagonale et des zéros partout ailleurs. Pour les matrices carrées d'ordre 3, la matrice identité a pour forme :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De manière générique, posant $I=[a_{ij}]$:

- $a_{ij} = 1$, pour $i = j$,
- $a_{ij} = 0$, pour $i \neq j$.

Définition (matrice orthogonale).

Une matrice Q est **orthogonale** si $Q^T Q = I$.

4. Matrice inverse

On peut aussi définir **l'inverse** A^{-1} d'une matrice carrée A (si cet inverse existe); cet inverse a la propriété suivante :

$$A^{-1} A = A A^{-1} = I.$$

L'inverse d'une matrice a les propriétés suivantes :

- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$;

- matrice orthogonale : $Q^{-1} = Q^T$.

Une matrice carrée n'a pas toujours un inverse :

Définition (matrice régulière; singulière).

Une matrice admettant un inverse est dite *régulière* ou *invertible*; une matrice carrée qui n'a pas d'inverse est dite *singulière* ou *non invertible*.

Une matrice carrée est régulière lorsque les colonnes (ou les lignes) sont des vecteurs linéairement indépendants. Une matrice carrée est singulière si au moins une colonne (ou ligne) est une combinaison linéaire des autres colonnes (ou lignes).

Pour trouver l'inverse d'une matrice, le procédé peut être assez exigeant, surtout si on a affaire à une matrice de très grandes dimensions. Pour une matrice 2×2 , il y a une formule très simple.

Théorème.

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Si $ad-bc \neq 0$, alors la matrice est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Et si $ad-bc=0$, alors la matrice est singulière.

Il existe un opérateur de matrice, appelé *déterminant* et noté $\det(A)$ pour une matrice A , qui est différent de zéro pour une matrice régulière et qui est égal à zéro pour une matrice singulière.

Le déterminant a les propriétés suivantes :

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
- $\det(I) = 1$ (I matrice identité)
- $\det(Q) = \pm 1$ pour Q matrice orthogonale.

Pour une matrice 2×2 , la formule pour le déterminant est très simple:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

2.3 Matrices et applications linéaires

Si A est une matrice $m \times n$, on peut définir l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}.$$

On peut noter que :

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}); \\f(a\mathbf{x}) &= A(a\mathbf{x}) = aA\mathbf{x} = af(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Ainsi, f est une *application linéaire*.

Définition (application linéaire).

Étant donnés deux espaces vectoriels E et F , une application $f : E \rightarrow F$ est *linéaire* si elle vérifie les 2 relations suivantes :

- 1- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
- 2- $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$,

où $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ces deux relations peuvent être regroupées sous la forme d'une relation unique:

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}),$$

où \mathbf{x}, \mathbf{y} et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Remarque. La condition que $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ implique que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ dénote le vecteur zéro respectif de chaque espace), puisque $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

On peut montrer que toute application linéaire f de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F (dimensions finies) peut se mettre sous la forme $f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, où B est une matrice. Supposons par exemple que $E = F$ de dimension 2 et qu'une base de E est $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Il s'ensuit que :

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2),$$

car f est une application linéaire.

En posant $B = [f(\mathbf{e}_1) \ f(\mathbf{e}_2)]$, on obtient $f(\mathbf{x}) = B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B\mathbf{x}$.

Exemple 1. Une application non-linéaire: la fonction $\sin(x)$:

En prenant $E = F = \mathbb{R}$, l'application $f(x) = \sin(x)$ n'est pas une application linéaire. En effet :

$$\begin{aligned}f(\alpha x) &= \sin(\alpha x), \\ \alpha f(x) &= \alpha \sin(x).\end{aligned}$$

En général, ces deux valeurs sont différentes : par exemple en prenant $x=\pi/2$ et $\alpha=2$:

$$\begin{aligned}\sin(2 \cdot \pi/2) &= 0 \\ 2\sin(\pi/2) &= 2.\end{aligned}$$

◆

Exemple 2. Application linéaire sur le plan réel :

En prenant $E = F = \mathbb{R}^2$, l'application suivante est une application linéaire :

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \begin{bmatrix} 2\alpha x_1 + 2\beta y_1 \\ 3\alpha x_2 + 3\beta y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\alpha x_1 \\ 3\alpha x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta y_1 \\ 3\beta y_2 \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2y_1 \\ 3y_2 \end{bmatrix} \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Ceci montre que $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.



Remarque. Sous forme matricielle, l'application linéaire de l'exemple précédent s'écrit:

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

2.4 Image et noyau d'une application linéaire

Définition (image d'une application linéaire).

L'image de f , notée $\text{Im } f$, est l'ensemble des éléments $y \in F$ qui ont un antécédent x dans E :

$$\text{Im } f = \{y \mid y = f(x), x \in E\}.$$

Théorème.

$\text{Im } f$ est un espace vectoriel qui est un sous-espace vectoriel de F .

Notons que si nous avons une base de E : (e_1, \dots, e_n) , alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est un ensemble générateur pour l'image. En effet, puisque tout élément x de E s'écrit comme une combinaison linéaire de cette base:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

on a donc:

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n).$$

Définition (noyau d'une application linéaire).

Le **noyau** de f , noté $\text{Ker } f$, est l'ensemble des éléments $\mathbf{x} \in E$ dont l'image est le vecteur zéro de F :

$$\text{Ker } f = \{ \mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \}.$$

Théorème.

$\text{Ker } f$ est un espace vectoriel qui est un sous-espace vectoriel de E .

Si on désire résoudre des équations linéaires basées sur des applications linéaires, on est conduit à chercher un vecteur \mathbf{x} tel que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Pour que cette équation ait une solution, il faut que \mathbf{b} soit un élément de $\text{Im } f$ ($\mathbf{b} \in \text{Im } f$) d'après la définition de $\text{Im } f$. Une telle équation peut avoir aucune solution, une solution ou une infinité de solutions.

Le noyau $\text{Ker } f$ est l'ensemble des solutions homogènes de l'équation $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$; cet ensemble peut contenir un seul élément (l'élément neutre) ou un ensemble d'éléments comprenant l'élément neutre.

Exemple 1. L'application $f(\mathbf{x})=a\mathbf{x}$ sur la droite réelle:

L'image de f est l'ensemble R . C'est un espace vectoriel de dimension 1. Le noyau de f est l'ensemble des x tel que $f(x) = 0$. La seule valeur possible est x égale à zéro. C'est un espace vectoriel de dimension zéro.

**Exemple 2. Une application dans le plan \mathbf{R}^2 :**

En prenant $E = F = \mathbf{R}^2$, l'application $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ est une application linéaire.

Sous forme matricielle:

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

L'image de f :

L'image de f est l'ensemble des vecteurs de \mathbf{R}^2 dont la deuxième composante est nulle; on peut noter que tous les éléments de l'image de f ont la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On sait que l'image de f est un espace vectoriel et donc qu'il a une base. La famille génératrice de l'image de f comprend un seul vecteur, disons par exemple $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; ce vecteur forme une base puisqu'il est libre.

Une autre base de l'image de f serait $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$; cette base ne contient qu'un seul élément.

Comme la base ne contient qu'un seul élément, l'image de f est un espace vectoriel de dimension 1.

Le noyau de f :

Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ de \mathbb{R}^2 tels que $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire tels que $x_1 + x_2 = 0$. Dans le plan, cet ensemble est une droite de pente -1 et passant par l'origine. Le vecteur $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ est un élément du noyau car $f(\mathbf{w}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; de manière

générale tout vecteur de la forme $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}$ est un élément du noyau; le vecteur \mathbf{w}_2 peut

s'écrire $\mathbf{w}_2 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Le noyau de l'application f est engendré par le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

comme le noyau est un espace vectoriel, on peut rechercher une base du noyau ; la famille génératrice comprend un seul vecteur, par exemple $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; il s'ensuit que la base

est formée d'un seul vecteur, par exemple $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Une autre base du noyau de f serait

$\left(\begin{bmatrix} -2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}\right)$. Comme chaque base ne contient qu'un seul élément, le noyau de f est un espace vectoriel de dimension 1. ◆

On remarque dans l'exemple précédent que les colonnes de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ forment un ensemble générateur pour l'image de cette fonction f . Ceci est vrai en général, puisque les colonnes sont les images d'une base:

Théorème.

Soit f une application linéaire : $f(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$. Alors les colonnes de A forment un ensemble générateur pour $\text{Im } f$.

2.5 Dimension de l'image et du noyau; nombre de solutions.

Définition : Le rang d'une application linéaire est la dimension de $\text{Im } f$.

Comme $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F , on a $\dim(\text{Im } f) \leq \dim(F)$. Dans la suite du cours, on se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème.

Si E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie et si $f: E \rightarrow F$ est une application linéaire :

$$\dim(E) = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f).$$

En particulier, supposons que $E = F = R^n$. Le théorème précédent indique que si le noyau de f ne contient que l'élément nul ($\dim \text{Ker } f = 0$), l'image de f est égale à R^n ($\dim(\text{Im } f) = n$). Dans ce cas, tous les vecteurs de R^n appartiennent à $\text{Im } f$ et toutes les équations $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ont une solution et une seule. On dira aussi que f est une **application régulière** qui définit une application **bijective** sur R^n . On peut alors écrire que $\mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{b})$ où f^{-1} est appelé **l'application inverse** de f .

Dans le cas contraire où le noyau de f contient des éléments autres que l'élément nul ($\dim \text{Ker } f > 0$), l'image de f est un sous-ensemble de R^n ($\dim(\text{Im } f) < n$). Dans ce cas, il y a des vecteurs de R^n qui ne sont pas des éléments de $\text{Im } f$ et l'équation $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ n'a pas de solution si \mathbf{b} est un élément (de R^n) qui n'appartient pas à $\text{Im } f$. Dans ce cas, f est une **application singulière** et n'a pas d'application inverse.

Exemple. Application de R^2 dans lui-même:

En prenant $E = F = R^2$, l'application $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ est une application linéaire;

on a vérifié précédemment que $\text{Im } f$ est l'axe des X et $\text{Ker } f$ est une droite de pente -1 passant par l'origine. On a montré que $\dim(\text{Im } f) = 1$ et $\dim(\text{Ker } f) = 1$ et comme $\dim(R^2)$ est égal à 2, on vérifie bien :

$$\begin{array}{rcl} \dim(R^2) & = & \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) \\ 2 & = & 1 + 1. \end{array}$$

On remarque aussi que l'application f est une application singulière qui n'a pas d'inverse.

On a $f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ et on a $f\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$; on voit donc que l'équation $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ a

plusieurs solutions puisque $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ sont deux solutions possibles. De même,

comme le noyau de f a pour dimension 1, cela signifie que l'équation $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ a plus d'une solution car tous les éléments du noyau sont solutions de cette équation $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Il s'ensuit que cette équation a une infinité de solutions.

◆