14/03/2020

د.وليد بن التركي

حل السلسلة رقم (1) في مقياس الاقتصاد الجزئي (2)

تمرين 1

لدينا دالة الانتاج لمؤسسة ما على الشكل التالي:

$$Q = 20L + 16L^2 - L^3$$

1- إيجاد دالتي الانتاج الحدي والانتاج المتوسط للعمل:

- دالة الانتاج الحدي:

$$PmL = \frac{dQ}{dL} = 20 + 32L - 3L^2$$

- دالة الانتاج للمتوسط:

$$PML = \frac{Q}{L} = 20 + 16L - L^2$$

2- كميات العمل التي تعظم كل من:

أ- الانتاج الكلي:

- رياضيا، يصل الانتاج الكلي إلى حده الأقصى طما يكون مشتقه الأول يساوي الصفر

- اقتصاديا، يصل الانتاج الكلي إلى حده الأقصى طما يكون الانتاج الحدي معدوما.

لدينا الانتاج الحدي:

$$PmL = 20 + 32L - 3L^2$$

$$\text{Max } Q = PT \Rightarrow PmL = 0$$

$$PmL = 20 + 32L - 3L^2 = 0$$

$$-3L^2 + 32L + 20 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (32)^2 - 4(-3)(20)$$

$$\Delta = 1264 \quad , \sqrt{\Delta} = 35,55$$

$$L_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-32 + 35,55}{-6} = -0,5$$ مرفوض

$$L_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-32 - 35,55}{-6} = 11,2$$ مقبول

ومنه ينعدم الانتاج الحدي أو يصل الانتاج الكلي إلى حده الأقصى عند مستوى العمل $L = 11,25$

ب- الانتاج للمتوسط:

- يصل الانتاج المتوسط إلى حده الأقصى عندما يكون مشتقه الأول يساوي الصفر أو يصل PM_L إلى حده الأقصى عند إلتقائه مع PmL (أي مساواته مع الانتاج الحدي)

* يكون PM_L أعظمي عندما يكون مشتقه الأول معدوما

لدينا دالة الانتاج المتوسط:

$$PM_L = 20 + 16L - L^2$$

$$\text{Max } PM_L \Rightarrow \frac{dPM_L}{dL} = 0$$

$$\frac{dPM_L}{dL} = 0 \Rightarrow 16 - 2L = 0$$

$$\Rightarrow L = 8$$

ومنه يصل PM_L إلى حده الأقصى عند مستوى العمل $L = 8$

ج- الانتاج الحدي:

- يصل الانتاج الحدي إلى حده الأقصى عندما يكون مشتقه الأول معدوما.

لدينا:

$$PmL = 20 + 32L - 3L^2$$

$$\text{Max } PmL \Rightarrow \frac{dPmL}{dL} = 0$$

$$\frac{dPmL}{dL} = 32 - 6L = 0$$

$$\Rightarrow L = 5,33$$

3- تحديد مناطق الانتاج الثلاث:

المنطقة ① حدودها من نقطة الأصل إلى نقطة وصول الانتاج للمتوسط إلى حده الأقصى.

وجدنا سابقا أن PM_L يصل إلى حده الأقصى عند مستوى العمل $L=8$ ومنه المنطقة الأولى $L=0$ و $L=8$

المنطقة ② حدودها من نقطة وصول الإنتاج المتوسط إلى حده الأقصى إلى نقطة انعدام الإنتاج الحدي.

وجدنا سابقا أن P_{mL} ينعدم عند مستوى العمل $L=11,25$ ومنه المنطقة الثانية $L=8$ و $L=11,25$

المنطقة ③ حدودها من نقطة انعدام الإنتاج الحدي إلى ما لا نهاية ومنه المنطقة الثالثة $L=11,25$ و $L=\infty$

4- تحديد النقطة التي تجعل الإنتاج الكلي يتزايد بمعدل متناقص

وهي النقطة التي يكون فيها منحنى الإنتاج الحدي في أقصى قيمة له. وتسمى نقطة الانعطاف أي قبلها كان الإنتاج الكلي يتزايد بمعدل متزايد.

- رياضيا: يتحقق ذلك لما يكون المشتق الثاني للإنتاج الكلي يساوي الصفر.

- اقتصاديا، نقطة الانعطاف يقابل وصول الإنتاج الحدي إلى حده الأقصى.

$$Max\ P_{mL} \Rightarrow \frac{dP_{mL}}{dL}=0$$

ووجدنا سابقا، أن ذلك يتحقق عند مستوى العمل $L=5,33$

وهي النقطة التي تجعل الإنتاج الكلي يتزايد بمعدل متناقص.

5- تحديد مرحلة الفلة عند كل كمية من كميات العمل التالية: $L=4$ ، $L=7$ ، $L=12$

يمر الإنتاج في المدى القصير بثلاث مراحل للفلة:

- تزايد الفلة: P_{mL} متزايد
- تناقص الفلة: P_{mL} متناقص حتى يصبح معدوما.

- الفلة السالبة: P_{mL} سالب

وجدنا سابقا أن الإنتاج الحدي يصل إلى نهايته العظمى عند $L=5,33$ ويصبح معدوما عند $L=11,25$

ومنه تكون مراحل الفلة كالتالي:

- تزايد الفلة: $L=0$ و $L=5,33$
- تناقص الفلة: $L=5,33$ و $L=11,25$
- الفلة السالبة: $L=11,25$ و $L=\infty$

وبالتالي عند مستويات العمل:

* $L=4$ - تمر الإنتاج بمرحلة تزايد الفلة أي أن المنتج لم يصل بعد إلى سنة المزج المثلى من عوامل الإنتاج.

* $L=7$ - تمر الإنتاج بمرحلة تناقص الفلة أي أن المنتج قد تجاوز سنة المزج المثلى من عوامل الإنتاج والتي قد وصل إليها عند النهاية العظمى لـ P_{mL} أي عند $L=5,33$

* $L=12$ - تمر الإنتاج بمرحلة الفلة السالبة، أي تجاوز المنتج وابتعد أكثر فأكثر عن سنة المزج المثلى من عوامل الإنتاج.

تمرين ②

لدينا دالة الإنتاج:

$$Q=24KL-10K^2-8L^2$$

1- إيجاد دوال الإنتاج الحدي والإنتاج المتوسط لكل من العمل ورأس المال:

- الإنتاج الحدي للعمل:

$$P_{mL}=\frac{dQ}{dL}=24K-16L$$

- الإنتاج الحدي لرأس المال:

$$P_{mK}=\frac{dQ}{dK}=24L-20K$$

- الانتاج المتوسط للعمل:

$$PM_L = \frac{Q}{L} = 24K - (10K^2/L) - 8L$$

- الانتاج المتوسط لرأس المال:

$$PM_K = \frac{Q}{K} = 24L - 10K - (8L^2/K)$$

ع- إذا كان رأس المال ثابت عند $K=1$ ؛

تصبح دالة الانتاج

$$Q = 24L - 10 - 8L^2$$

$$Q = -8L^2 + 24L - 10$$

ع-1 يلتقي منحنيا الانتاج الحدي والانتاج المتوسط عندما يكون الانتاج المتوسط في حده الأقصى.

ط: يكون الانتاج المتوسط أعظميا إذا كان مشتقه الأول يساوي الصفر

$$PM_L = -8L + 24 - (10/L)$$

$$\text{Max } PM_L \Rightarrow \frac{dPM_L}{dL} = 0$$

$$\frac{dPM_L}{dL} = -8 + (10/L^2) = 0$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{10}{L^2} \Rightarrow L^2 = 1,25$$

$$\Rightarrow L = 1,11$$

ط: عند تقاطع منحنيي الناتج الحدي والناتج المتوسط يكون $PM_L = Pm_L$

$$PM_L = Pm_L \Rightarrow -8L + 24 - (10/L)$$

$$= -16L + 24$$

$$\Rightarrow -8L - 10/L = -16L$$

$$\Rightarrow 8L - 10/L = 0$$

$$\Rightarrow 8L = \frac{10}{L} \Rightarrow 8L^2 = 10$$

$$\Rightarrow L^2 = 1,25 \Rightarrow L = 1,11$$

ومنه كمية العمل المقابلة لنقطة تلاقي PM_L و Pm_L هي $L = 1,11$

- مرحلة الغلة عند هذه النقطة، في هذه النقطة تعبر الانتاج لمرحلة تناقص الغلة، لأن في هذه النقطة يكون الانتاج الحدي متناقصا. حيث أن الانتاج الحدي يصل إلى نهايته العظمى ويبدأ في التناقص قبل وصول الانتاج المتوسط إلى أقصاه.

ع- ع المنطقة الاقتصادية للانتاج وهي المنطقة الثانية. تدور ضمن نقطة وصول الانتاج المتوسط إلى حده الأقصى (تقاطع منحنيي PM_L و Pm_L) إلى نقطة انعدام الانتاج الحدي. حيث ستعدم الانتاج الانتاج الحدي (وصول الانتاج الكلي إلى حده الأقصى عند مستوى العمل

$$Pm_L = -16L + 24 = 0$$

$$L = 1,5$$

ومنه المنطقة الاقتصادية للانتاج (المنطقة الثانية)

$$L = 1,11 \text{ إلى } L = 1,5$$

وتعتبر المنطقة الاقتصادية لأنه يكون فيها كل من الانتاج الحدي للعمل والانتاج الحدي لرأس المال موجبا (Pm_L ، Pm_K) ويكون الانتاج الكلي في تزايد ولو بمعدلات متناقصة. وتستبعد المنطقة ① لأن Pm_K يكون فيها سالبا ($Pm_K < 0$) كما تستبعد المنطقة ③ لأن Pm_L يكون فيها سالبا ($Pm_L < 0$) كما أن الانتاج الكلي يكون متناقصا.

تمرين 3

كتابة دالة الانتاج:

$$Q = 2K^{1/4} \cdot L^{3/4}$$

1- إيجاد دوال الانتاج الحدي والانتاج المتوسط للعمل ورأس المال:

- الانتاج الحدي للعمل:

$$Pm_L = \frac{dQ}{dL} = \frac{3}{4} \cdot 2K^{1/4} \cdot L^{-1/4} = \frac{3}{2}\left(\frac{K}{L}\right)^{1/4}$$

- الانتاج الحدي لرأس المال:

$$Pm_K = \frac{dQ}{dK} = \frac{1}{4} \cdot 2K^{-3/4} \cdot L^{3/4} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{L}{K}\right)^{3/4}$$

- الانتاج المتوسط للعمل:

$$PM_L = \frac{Q}{L} = \frac{2K^{1/4} \cdot L^{3/4}}{L} = 2K^{1/4} \cdot L^{-1/4} = 2\left(\frac{K}{L}\right)$$

- الانتاج المتوسط لرأس المال:

$$PM_K = \frac{Q}{K} = \frac{2K^{1/4} \cdot L^{3/4}}{K} = 2K^{-3/4} \cdot L^{3/4} = 2\left(\frac{L}{K}\right)^{3/4}$$

2- نسبة زيادة الانتاج: لتحديد ذلك لابد من حساب مرونة الانتاج بالنسبة لرأس المال

$$E_{Q/K} = \frac{dQ}{dK} \cdot \frac{K}{Q}$$

أو:

$$E_{Q/K} = \frac{Pm_K}{PM_K} = \frac{\frac{1}{2}K^{-3/4}L^{3/4}}{2K^{-3/4}L^{3/4}}$$

$$E_{Q/K} = 1/4 = 0,25$$

ومعنى ذلك أنه إذا زاد رأس المال بنسبة 1% يزداد الانتاج بنسبة 0,25%.

ومنه عند زيادة رأس المال بنسبة 10% يزداد الانتاج بنسبة 2,5%.

- نستنتج أن الانتاج غير مرن لأن $E_{Q/K} < 1$ على اعتبار أن $Pm_K < PM_K$

3- تحديد كمية الانتاج المثلى:

لتحديد ذلك لابد من حساب تولفة عناصر الانتاج التوازنية حيث يواجه المنتج المسألة التالية:

$$\begin{cases} \text{Max } Q = 2K^{1/4}L^{3/4} \\ s/c: 96 = 2K + L \end{cases}$$

نستخدم مثلا طريقة شرط التوازن:

$$\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}K^{1/4} \cdot L^{-1/4}}{\frac{1}{2}K^{-3/4} \cdot L^{3/4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3K^{1/4} \cdot K^{3/4}}{L^{1/4} \cdot L^{3/4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3K}{L} = \frac{1}{2} \Rightarrow L = 6K$$

بالتعويض في قيد التكلفة:

$$C = KP_K + LP_L = 2K + L$$

$$C = 2K + 6K = 8K$$

$$96 = 8K \Rightarrow K = 12$$

$$L = 6K = 6 \times 12 \Rightarrow L = 72$$

ومنه كمية الانتاج المثلى:

$$Q = 2K^{1/4}L^{3/4} = 2(12)^{1/4} \cdot (72)^{3/4}$$

$$Q = 92$$

4- حساب أدنى تكلفة لانتاج $Q_0 = 82$، حيث يواجه المنتج المسألة التالية:

$$\begin{cases} \text{Min } C = 2K + L \\ s/c: Q_0 = 82 = 2K^{1/4}L^{3/4} \end{cases}$$

نستخدم مثلا طريقة شرط التوازن:

$$\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{3K}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow L = 6K$$

بالتعويض في دالة الانتاج:

$$Q_0 = 82 = 2K^{1/4}(6K)^{3/4}$$

$$\Rightarrow 82 = 7,66K \Rightarrow K = 10,70$$

$$L = 6 \times 10,70 \Rightarrow L = 64,22$$

ومنه أدنى تكلفة:

$$C = 64,22 \times 1 + 10,70 \times 2 = 85,62$$

5- معادلة مسار التوسع:
من شرط توازن المنتج

$$\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{3K}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow L = 6K \Rightarrow K = 1/6\,L$$

وهي معادلة مسار التوسع
المعنى الاقتصادي لمسار التوسع:
يمثل مسار التوسع في المدى الطويل النقاط المثلى (نقاط التوازن) من رأس المال والعمل عندما يتغير مستوى الانتاج أو تتغير التكلفة الكلية بينما تبقى أسعار عناصر الانتاج ثابتة.

6- طبيعة غلة الحجم:
دالة الانتاج المعطاة هي من نوع كوب دوغلاس

$$Q = 2K^{1/4} \cdot L^{3/4}$$

حيث:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

ومنه لدينا غلة حجم ثابتة حيث α و β تمثلان مرونتي الانتاج بالنسبة لعاملي الانتاج L و K على التوالي.
التفسير الاقتصادي لغلة الحجم الثابتة عند زيادة عوامل الانتاج بنفس النسبة تؤدي إلى زيادة متساوية في الانتاج.

تمرين 4
لدينا دالة الانتاج:

$$Q = 50K^{0,4} \cdot L^{0,6}$$

1- معادلة التكلفة المتساوية:

$$CT = LP_L + KP_K$$

$$600 = 6L + 2K$$

2- المعدل الحدي للاحلال التقني $TMST_{LK}$ عند أي نقطة من منحنى الناتج المتساوي:

$$TMST_{LK} = \frac{Pm_L}{Pm_K}$$

$$TMST_{LK} = \frac{0,6 \cdot 50K^{0,4}L^{-0,4}}{0,4 \cdot 50K^{-0,6}L^{0,6}}$$

$$= \frac{30K}{20L} = \frac{3K}{2L}$$

3- التوليفة المثلى من عناصر الانتاج
من شرط توازن المنتج:

$$\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{3K}{2L} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow 6L = 3K$$

$$\Rightarrow L = 1/2\,K$$

نعوض في معادلة التكلفة المتساوية

$$600 = 6\left(\frac{1}{2}K\right) + 2K = 5K$$

$$\Rightarrow K = 120,\ L = 60$$

- كمية الانتاج:

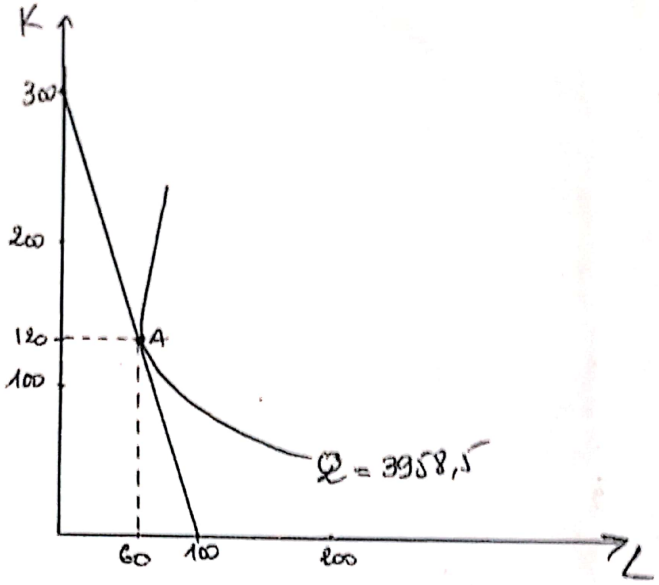
$$Q = 50K^{0,4} \cdot L^{0,6} = 50(120)^{0,4} \cdot (60)^{0,6}$$

$$Q = 3958,5$$

- التمثيل البياني للاختيار الأمثل
لرسم خط التكلفة المتساوية نحسب النقاط المتطرفة:

$$K = 0 \Rightarrow L = CT/P_L = 600/6 = 100$$

$$L = 0 \Rightarrow K = CT/P_K = 600/2 = 300$$



النقطة A تمثل المثلى من عناصر الانتاج L و K ، وهي نقطة تماس بين خط التكلفة المتساوية (خط ميزانية المنتج) ومنحنى الناتج المتساوي Q ، حيث عند النقطة A يتحقق هدف المنتج في ظل قيد التكلفة.

4 - حساب مرونة الانتاج في المدى الطويل :

وهي تساوي مجموع مرونتي الانتاج بالنسبة للعمل ورأس المال اي تكون كل عناصر الانتاج متغيرة

مرونة العمل :

$$E_{Q/L} = \frac{P_{mL}}{PM_L} = \frac{30K^{0,4}.L^{-0,4}}{50K^{0,4}L^{-0,4}}$$

$$E_{Q/L} = 3/5 = 0,6$$

مرونة رأس المال :

$$E_{Q/K} = \frac{P_{mK}}{PM_K} = \frac{20K^{-0,6}.L^{0,6}}{50K^{-0,6}L^{0,6}}$$

$$E_{Q/K} = 2/5 = 0,4$$

ومنه مرونة الانتاج في المدى الطويل :

$$E_Q = E_{Q/L} + E_{Q/K} = 0,6 + 0,4 = 1$$

نستنتج أن الانتاج تحسن بمرحلة ثبات غلة الحجم في المدى الطويل

5 - إثبات أن قانون تناقص الغلة محقق بالنسبة للعمل :

في المدى القصير عند ثبات K عند المستوى $\bar{K}$ وتغير L فقانون تناقص الغلة أو قانون تناقص الانتاج الحدي للعمل محقق .

ونثبت ذلك بإثبات تناقص الانتاج الحدي لما يكون مشتقه الأول سالبا .

الانتاج الحدي للعمل :

$$P_{mL} = \frac{dQ}{dL} = 30K^{0,4}.L^{-0,4}$$

$$\frac{dP_{mL}}{dL} = -12K^{0,4}.L^{-1,4}$$

$$= -12\frac{K^{0,4}}{L^{1,4}} < 0$$

وبما أن : $L>0$ ، $K>0$

فإن P_{mL} متناقص وقانون تناقص الغلة محقق بالنسبة للعمل

تمرين 5

لدينا دالة الانتاج :

$$Q = K^2 - KL + 2L^2$$

1 - إيجاد دوال الطلب على عناصر الانتاج : نستخرج دوال الطلب من الشروط الأولى لتعظيم الربح .

$$\Pi = RT - CT$$

$$\Pi = P.Q - LP_L - KP_K$$

$$\Pi = P(K^2 - KL + 2L^2) - LP_L - KP_K$$

$$\frac{d\Pi}{dL} = -PK + 4PL - P_L = 0 \quad \cdots (1)$$

$$\frac{d\Pi}{dK} = 2PK - PL - P_K = 0 \quad \cdots (2)$$

من المعادلة ① نستخرج K بدلالة L

$$K = \frac{4PL - P_L}{P} \quad \ldots ③$$

ثم نعوض المعادلة ③ في ② فنحصل على دالة الطلب على العمل

$$L = \frac{2P_L + P_K}{7P} \quad \ldots ④$$

لاشتقاق دالة الطلب على رأس المال نعوض المعادلة ④ في ① أو ② فنحصل على:

$$K = \frac{P_L + 4P_K}{7P}$$

2- درجة تجانس هذه الدالة:

$$f(\lambda L, \lambda K) = (\lambda K)^2 - (\lambda K)(\lambda L) + 2(\lambda L)^2$$
$$= \lambda^2 K^2 - \lambda^2 KL + 2\lambda^2 L^2$$
$$= \lambda^2 (K^2 - KL + 2L^2)$$

ومنه $r = 1$ يعني أن الدالة متجانسة من الدرجة الثانية وبما أن $r > 1$ فإن الانتاج تمر بمرحلة تزايد غلة الحجم بمعنى أن الانتاج يتزايد بنسبة أكبر من نسبة تزايد عناصر الانتاج

3- معادلة مسار التوسع:

إذا كان $P_L = 2$ ، $P_K = 4$

شرط توازن للمنتج

$$\frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{-K + 4L}{2K - L} = \frac{2}{4}$$

$$-4K + 16L = 4K - 2L$$
$$\Rightarrow 18L = 8K \Rightarrow K = \frac{18}{8} L$$
$$\Rightarrow K = \frac{9}{4} L$$

وهي معادلة مسار التوسع

4- حساب حجم الانتاج الموافق لتكلفة كلية $C = 100$

يعني أن المنتج أمام المسألة التالية:

$$\begin{cases} Max\ Q = K^2 - KL + 2L^2 \\ s/c: 100 = 2L + 4K \end{cases}$$

نستخدم مثلا طريقة شرط التوازن:

$$\frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{-K + 4L}{2K - L} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2K - L = -2K + 8L$$
$$\Rightarrow 4K = 9L \Rightarrow K = \frac{9}{4} L$$

نعوض في قيد التكلفة:

$$100 = 2L + 4\left(\frac{9}{4} L\right)$$
$$100 = 11L \Rightarrow L = 9{,}09$$
$$K = \frac{9}{4}(9{,}09) \Rightarrow K = 20{,}45$$

حجم الانتاج:

$$Q = (20{,}45)^2 - (20{,}45)(9{,}09) + 2(9{,}09)^2$$
$$Q = 397{,}73$$

5- حساب أدنى تكلفة للوافقة لحجم الانتاج $Q = 300$

يعني أن المنتج أمام المسألة التالية:

$$\begin{cases} Min\ C = 2L + 4K \\ s/c: Q_0 = 300 = K^2 - KL + 2L^2 \end{cases}$$

نستخدم مثلا طريقة شرط التوازن

$$\frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{-K + 4L}{2K - L} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4K = 9L \Rightarrow L = \frac{4K}{9}$$

بالتعويض في دالة الانتاج نجد:

$$300 = K^2 - K\left(\frac{4K}{9}\right) + 2\left(\frac{4K}{9}\right)^2$$

$$300 = \frac{77}{81} K^2$$

$$\Rightarrow K = 17,76 \quad , L = 7,89$$

ومنه أدنى تكلفة هي:

$$CT = 4(17,76) + 2(7,89) = 86,82$$

6- حساب للعمل الحدي للاحلال التقني $TMST_{LK}$ عند نقطة التوازن في السؤال السابق.

$TMST_{LK}$ عند التوازن يساوي نسبة أسعار عوامل الانتاج

$$TMST_{LK} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

تفسيره الاقتصادي: يتخلى المنتج على نصف $\left(\frac{1}{2}\right)$ وحدة من K ليعوضها بوحدة واحدة من L لكي يبقى على نفس منحنى الناتج المتساوي (نفس مستوى الانتاج).

7- حساب مرونة الانتاج بالنسبة لكل عامل من عوامل الانتاج:

- مرونة الانتاج بالنسبة للعمل:

$$E_{Q/L} = \frac{P_{mL}}{PM_L} = \frac{-K + 4L}{\frac{K^2}{L} - K + 2L}$$

$$= \frac{-KL + 4L^2}{K^2 - KL + 2L^2}$$

- مرونة الانتاج بالنسبة لرأس المال:

$$E_{Q/K} = \frac{P_{mK}}{PM_K} = \frac{2K - L}{K - L + \frac{2L^2}{K}}$$

$$= \frac{2K^2 - KL}{K^2 - KL + 2L^2}$$

8- حساب مرونة الانتاج في المدى الطويل:

هي عبارة عن مجموع مرونتي العمل ورأس المال اللذان يتغيران معا في المدى الطويل

$$E_Q = E_{Q/L} + E_{Q/K}$$

$$= \frac{-KL + 4L^2}{K^2 - KL + 2L^2} + \frac{2K^2 - KL}{K^2 - KL + 2L^2}$$

$$= \frac{-2KL + 2K^2 + 4L^2}{K^2 - KL + 2L^2}$$

$$= \frac{2(K^2 - KL + 2L^2)}{(K^2 - KL + 2L^2)}$$

$$E_Q = 2$$

نلاحظ أن مرونة الانتاج في المدى الطويل تساوي درجة تجانس الدالة $n = 2$.