Université Mohamed Khider, Biskra 2019/2020
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Master 1: **M1.4 (Modèle linéaire)**

Solution de la première partie de l'exercie N°3 de la Série N°2

* *

Exercice 1 *Suite de l'exercice 1, et 2.*

1- Déduire, de l'exercie 2, une base $D_r^{-1}-$orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

2-Déterminer les composantes principales des profils-lignes et déduire celles des profils-colonnes.

3-Quelle sont les valeurs de l'espérance et la variance de chaque composante principale pour les deux profils? Quelles sont les valeurs les covariances entre les composantes principales? Que peut-on déduire?

4-Déterminer les contributions absolues et relatives, de chaque ligne, aux inerties des axes principaux.

5. Déduire, de la question 2, les coordonnées des lignes des deux nuages de points Y_r et Y_c des les nouvelles bases associées.

6.Dans le même plan définit pas les deux premiers axes principaux, représenter les deux nuages de point associes à Y_r et Y_c.
7-Analyser et discuter les résultats obtenus.

* *

Solution

Profils-lignes:

$$X_r = \begin{pmatrix} 0.106\,38 & 0.595\,74 & 0.255\,32 & 4.255\,3\times 10^{-2} \\ 0.013\,4 & 4.857\,6\times 10^{-2} & 0.351\,76 & 0.586\,27 \\ 0.288\,46 & 0.442\,31 & 0.192\,31 & 7.692\,4\times 10^{-2} \end{pmatrix},$$

$$D_r = \begin{pmatrix} 0.296\,16 & 0 & 0 \\ 0 & 0.376\,18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.327\,66 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = 0.479\,66, \lambda_2 = 5.310\,9\times 10^{-2}, \lambda_3 = 5.997\times 10^{-7},\ \lambda_4 = 0.$$

$$u_1^* := \begin{pmatrix} 0.132\,46 \\ 0.325\,89 \\ -9.079\,1\times 10^{-2} \\ -0.367\,58 \end{pmatrix},\ u_2^* := \begin{pmatrix} 0.309\,57 \\ -0.267\,64 \\ -0.106\,4 \\ 6.445\,7\times 10^{-2} \end{pmatrix},$$

$$u_3^* := \begin{pmatrix} 2.242\,0\times 10^{-2} \\ -0.215\,51 \\ 0.421\,87 \\ -0.228\,77 \end{pmatrix},\ u_4^* := \begin{pmatrix} 0.131\,06 \\ 0.339\,63 \\ 0.270\,95 \\ 0.258\,35 \end{pmatrix}.$$

Profils-colonnes:

$$X_c = \begin{pmatrix} 0.240\,39 & 3.\,846\,3\times10^{-2} & 0.721\,18 \\ 0.519\,49 & 5.\,380\,4\times10^{-2} & 0.426\,72 \\ 0.279\,07 & 0.488\,37 & 0.232\,56 \\ 0.048\,78 & 0.853\,66 & 9.\,756\,1\times10^{-2} \end{pmatrix},$$

$$D_c = \begin{pmatrix} 0.131\,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.339\,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.270\,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.258\,35 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 0.479\,66, \lambda_2 = 5.\,310\,9\times10^{-2}, \lambda_3 = 0.$$

$$v_k^* := \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} N D_c^{-1} u_k^*, k = 1, 2.$$

$$v_1^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} N D_c^{-1} u_1^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} X_c^t u_1^*$$
$$= \frac{1}{\sqrt{0.479\,66}} \begin{pmatrix} 0.240\,39 & 3.\,846\,3\times10^{-2} & 0.721\,18 \\ 0.519\,49 & 5.\,380\,4\times10^{-2} & 0.426\,72 \\ 0.279\,07 & 0.488\,37 & 0.232\,56 \\ 0.048\,78 & 0.853\,66 & 9.\,756\,1\times10^{-2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.132\,46 \\ 0.325\,89 \\ -9.\,079\,1\times10^{-2} \\ -0.367\,58 \end{pmatrix}$$

:

$$v_1^* = \begin{pmatrix} 0.227\,95 \\ -0.484\,42 \\ 0.256\,46 \end{pmatrix}$$

$$v_2^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} N D_c^{-1} u_2^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} X_c^t u_2^*$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5.\,310\,9\times10^{-2}}} \begin{pmatrix} 0.240\,39 & 3.\,846\,3\times10^{-2} & 0.721\,18 \\ 0.519\,49 & 5.\,380\,4\times10^{-2} & 0.426\,72 \\ 0.279\,07 & 0.488\,37 & 0.232\,56 \\ 0.048\,78 & 0.853\,66 & 9.\,756\,1\times10^{-2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.309\,57 \\ -0.267\,64 \\ -0.106\,4 \\ 6.\,445\,7\times10^{-2} \end{pmatrix}$$

:

$$v_2^* = \begin{pmatrix} -0.395\,6 \\ 2.\,467\,7\times10^{-3} \\ 0.393\,1 \end{pmatrix}.$$

Une base $D_r^{-1}-$orthornormée de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1^* = \begin{pmatrix} 0.227\,95 \\ -0.484\,42 \\ 0.256\,46 \end{pmatrix}, v_2^* = \begin{pmatrix} -0.395\,6 \\ 2.\,467\,7\times10^{-3} \\ 0.393\,1 \end{pmatrix}, v_3^* = \begin{pmatrix} 0.296\,16 \\ 0.376\,18 \\ 0.327\,660 \end{pmatrix}.$$

Composantes principales des profils-lignes:

$$c_k = X_r D_c^{-1} u_k^*, k = 1, 2, 3.$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0.10638 & 0.59574 & 0.25532 & 4.2553\times 10^{-2} \\ 0.0134 & 4.8576\times 10^{-2} & 0.35176 & 0.58627 \\ 0.28846 & 0.44231 & 0.19231 & 7.6924\times 10^{-2} \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.13246 \\ 0.32589 \\ -9.0791\times 10^{-2} \\ -0.36758 \end{pmatrix}$$

:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0.53306 \\ -0.89186 \\ 0.54207 \end{pmatrix}.$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 0.10638 & 0.59574 & 0.25532 & 4.2553\times 10^{-2} \\ 0.0134 & 4.8576\times 10^{-2} & 0.35176 & 0.58627 \\ 0.28846 & 0.44231 & 0.19231 & 7.6924\times 10^{-2} \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.30957 \\ -0.26764 \\ -0.1064 \\ 6.4457\times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

:

$$c_2 = \begin{pmatrix} -0.30783 \\ 1.5098\times 10^{-3} \\ 0.27647 \end{pmatrix}.$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} 0.10638 & 0.59574 & 0.25532 & 4.2553\times 10^{-2} \\ 0.0134 & 4.8576\times 10^{-2} & 0.35176 & 0.58627 \\ 0.28846 & 0.44231 & 0.19231 & 7.6924\times 10^{-2} \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2.2420\times 10^{-2} \\ -0.21551 \\ 0.42187 \\ -0.22877 \end{pmatrix}$$

:

$$c_3 == \begin{pmatrix} 2.8327\times 10^{-5} \\ 1.5609\times 10^{-5} \\ -8.2761\times 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.8327\times 10^{-5} \\ 1.5609\times 10^{-5} \\ -8.2761\times 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

$$c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$c_k = Y_r D_c^{-1} u_k^* = \left(X_r - 1_p g_r^t\right) D_c^{-1} u_k^*$$

$$\begin{aligned} c_1 &= Y_r D_c^{-1} u_k^* = \left(X_r - 1_p g_r^t\right) D_c^{-1} u_1^* \\ &= X_r D_c^{-1} u_1^* \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_2 &= Y_r D_c^{-1} u_2^* = \left(X_r - 1_p g_r^t\right) D_c^{-1} u_2^* \\
&= X_r D_c^{-1} u_2^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_3 &= Y_r D_c^{-1} u_3^* = \left(X_r - 1_p g_r^t\right) D_c^{-1} u_3^* \\
&= X_r D_c^{-1} u_3^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_4 &= Y_r D_c^{-1} g_r = \left(X_r - 1_p g_r^t\right) D_c^{-1} g_r \\
&= X_r D_c^{-1} g_r - 1_p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{c}_4 = &\begin{pmatrix} 0.106\,38 & 0.595\,74 & 0.255\,32 & 4.\,255\,3 \times 10^{-2} \\ 0.013\,4 & 4.\,857\,6 \times 10^{-2} & 0.351\,76 & 0.586\,27 \\ 0.288\,46 & 0.442\,31 & 0.192\,31 & 7.\,692\,4 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} 0.131\,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.339\,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.270\,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.258\,35 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.131\,06 \\ 0.339\,63 \\ 0.270\,95 \\ 0.258\,35 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
c_4 = \widetilde{c}_4 - 1_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
Y_r^* = \begin{pmatrix} 0.533\,06 & -0.307\,83 & 2.\,832\,7 \times 10^{-5} & 0 \\ -0.891\,86 & 1.\,509\,8 \times 10^{-3} & 1.\,560\,9 \times 10^{-5} & 0 \\ 0.542\,07 & 0.276\,47 & -8.\,276\,1 \times 10^{-6} & 0 \end{pmatrix}
$$