جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييــــر

قسم مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنـــة الأولـــى

محاضرات في مقياس

الإحصـــاء الرياضي.

المحور الخامس: التوزيعات الاحتمالية الخاصة

إعداد الدكتور هاشمي عبابسة.

h.ababsa@univ-biskra.dz

statdesc2018@gmail.com

المحور الخامس: التوزيعات الاحتمالية الخاصة.

تهدف نظرية الاحتمالات إلى دراسة التجارب العشوائية من خلال تحديد نموذج احتمالي يمكننا من وصف هذه التجربة وتحليلها بصورة مقبولة.

من الناحية النظرية يمكننا تصورُ عددٍ لانهائي من التجارب العشوائية، وبالتالي تكوينُ عدد لا نهائي أيضا من النماذج الاحتمالية المختلفة، إلا أنه في الواقع هناك عددٌ محدودٌ من التجارب العشوائية التي نصادفها في معظم الأوقات، بحيث تكون لها خصائص مشتركة.

ولهذا سنتطرق في هذه المحاضرة إلى دراسة تلك التجارب العشوائية ونماذجها الاحتمالية المقابلة التي نصادفها بصورة شائعة ومتكررة في التسيير والاقتصاد والتسويق والعلوم الاجتماعية... الخ.

تنقسم قوانين الاحتمالات لهذه التوزيعات الخاصة الى مجموعتين:

- قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة.
- قوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة.

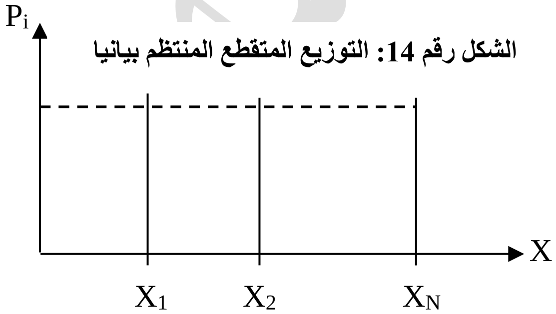
أ- التوزيعات الاحتمالية الخاصة للمتغير المتقطع:

1. التوزيع المنتظم:

➢ **تعريفه:** نقول إن المتحول العشوائي المتقطع X خاضع للتوزيع المنتظم إذا كان يأخذ القيمَ الممكنة x_i من فضاء الإمكانيات باحتمالات متساوية، أي:

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = \cdots = P(X = x_N)$$

الشكل رقم 14: التوزيع المتقطع المنتظم بيانيا



المصدر: افتراضي

➢ **تمثيله البياني** : (أنظر الشكل رقم14)

➢ **خواصه:** ككل توزيع احتمالي:

$* \quad P(x_i) \leq 0$ $\qquad$ $* \quad \sum \mathrm{P}\,(\mathrm{x_i}) = 1$

➢ **قيمه العددية المميزة:**

✓ **التوقع الرياضي:** $E(x) = \sum P.x = \frac{N+1}{2}$

✓ **التباين:** $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{N^2-1}{12}$

ملاحظة : العزوم المُمركزة ذات المراتب الفردية لهذا التوزيع كلها معدومة أي :

$\mu_1 = 0$, $\mu_3 = 0$, $\mu_5 = 0$ ... وهكذا.

مثال01: *رمينا قطعة نرد متوازنة، لنفرض أن X متحول عشوائي يمثل عدد النقاط التي تظهر.*

- *ما هو التوزيع الاحتمالي للمتغير X؟ ولماذا ؟*
- *أحسب توقعه الرياضي وتباينه.*
- *حدد تابع توزيعه.*

الجواب:

- *التوزيع الاحتمالي للمتغير X هو التوزيع هو التوزيع المنتظم، لأن جميع إمكانيات X متساوية الاحتمال.*

- **حساب التوقع الرياضي:**

الجدول رقم 08: حساب التوقع الرياضي.

$P_i . X_i$	P_i	x_i
1/6	1/6	1
2/6	1/6	2
3/6	1/6	3
4/6	1/6	4
5/6	1/6	5
6/6	1/6	6
21/6		

المصدر: معطيات المثال 01.

$$E(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i P_i = \frac{21}{6} = \frac{N+1}{2} = \frac{7}{2} = \mathbf{3.5}$$

- **حساب التباين:**

$$V(x) = \frac{N^2-1}{12} = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} = \mathbf{2.92}$$

- **تحديد تابع التوزيع:**

$$F(x_k) = \begin{cases} 0 \ (\text{حدث مستحيل}) & x_k < 1 \\ 1/6 & 1 \le x_k < 2 \\ 2/6 & 2 \le x_k < 3 \\ 3/6 & 3 \le x_k < 4 \\ 4/6 & 4 \le x_k < 5 \\ 5/6 & 5 \le x_k < 6 \\ 6/6 = 1 \quad (\text{حدث أكيد}) & 6 \le x_k < +\infty \end{cases}$$

2. التوزيع الثنائي (الحداني أو ذي الحدين). *Distribution Binomiale*

➢ **تعريفه:** يستند هذا التوزيع الى نموذج " برنولي " (نسبة الى "جميس برنولي " في نهاية القرن 17 م) إذ يستخدم في التجارب ثنائية النتيجة؛ أي التي تؤدي تجربةٌ واحدةٌ منها إلى نتيجتين اثنتين لا غير ، مثلا: نجاح ≠ فشل، حياة ≠ موت ، إصابة ≠ خطأ ، ذكر≠ أنثى ...، ولهذا سُمي هذا التوزيع " توزيع برنولي".

➢ **قانون احتماله:** نضع " p " يمثل احتمال تحقق إحدى النتيجتين في تجربة واحدة (ونسميه نجاحا) ، ونضع "q" يمثل احتمال عدم تحققها (ونسميه فشلا) ، حيث p + q = 1 .

لنكرر هذه التجربة " N " مرة، إن حصولَنا على " k " نجاحا يعني بالضرورة حصولنا على " N – k " فشلا، وبما أن هذه الـــــN تجربة مستقلةٌ، فإن حادث حصولنا على " k " نجاح يتحقق بعدة طرقٍ عددها $C_{\mathrm{N}}^{\mathrm{k}}$ طريقة.

وبذلك يكون احتمالُ حصولنا على k نجاحا من N تجربة كما يلي:

$$\boxed{P(X=k)=C_N^k p^K q^{N-k}}$$

ويكون المتغير X خاضعا للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين N و p، حيث نكتب: $X \sim B(N,p)$

➢ **مميزاته العددية :**

- ✓ **التوقع الرياضي:** $E(x)=N.p$
- ✓ **التباين:** $V(x)=N.p.q$

➢ **تابع التوزيع الثنائي:** إذا كان X متحولا عشوائيا خاضعا للتوزيع الثنائي، فإن تابع توزيعه يعطى بالعلاقة الآتية:

$$F(x_k)=P(x\le x_k)=\sum_{i=1}^{k} C_N^{x_i}\,P^{x_i}q^{N-x_i}$$

كما أن احتمال أي يقع X بين قيمتين M , L مثلا يعطى كما يلي :

$$P(L<X<M)=F(M)-F(L)$$

وبالكيفية نفسها: $P(X>k)=1-P(X\le k)=1-F(k)$

مثال 02: *رمينا قطعة نقود 6 مرات، نفرض أن ظهور الصورة يمثل النجاح.*

1. *ما هو احتمال ظهور صورتين؟*
2. *ما هو احتمال ظهور 4 صور على الأقل؟*
3. *ما هو احتمال عدم ظهور الصورة؟*
4. *أحسب μ و $V(x)$ لهذا التوزيع؟*
5. *ما هو احتمال ظهور الصورة أقل من 4 مرات؟*

الجواب: $X \sim B(6, {}^1\!/_2)$

1. $P(X=2)=C_6^2p^2q^4=\frac{6!}{2!(6-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\frac{15}{64}}$
2. $P(X\ge 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$

$$=C_6^4p^4q^2+C_6^5p^5q^1+C_6^6p^6q^0$$

$$=\frac{6!}{4!\,(6-4)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{6!}{5!\,(6-5)!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1+\frac{6!}{6!\,(6-6)!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \mathbf{\frac{22}{64}}$$

3. $P(X = 0) = C_6^0 p^0 q^6 = \frac{6!}{0!(6-0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \mathbf{\frac{1}{64}}$
4. $E(x) = N.p = 6.\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{3}$

   $V(x) = N.p.q = 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{6}{4}\right) = \frac{3}{2} = \mathbf{1.5}$
5. $P(X < 4) = 1 - P(X \geq 4) = 1 - \frac{22}{64} = \mathbf{\frac{42}{64}}$

<u>مثال 03</u>: *رمينا زهرة نرد 7 مرات، نفرض أن ظهور 5 أو 6 في أية رمية يمثل النجاح.*

- *ما هو احتمال تحقق النجاح 3 مرات؟*

<u>الجواب</u>: $X \sim B(7, {}^{2}/_{6})$

$$P(X = 3) = C_7^3 p^3 q^4 = \frac{7!}{3!\,(7-3)!}\left(\frac{2}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^4 = 35 \times \frac{1}{9} \times \frac{16}{81} = \frac{560}{729}$$
$$= \mathbf{0.7681}$$

3. توزيع "بواسون": *Distribution de Poisson*

➢ **تعريفه**: سُمي هذا التوزيع كذلك نسبة إلى عالم الرياضيات والفيزياء الفرنسي " *Siméon Denis Poisson*" الذي اكتشفه عام 1838 م. وعلى غِرار التوزيع الثنائي، فهذا التوزيع يستخدم في التجارب ثنائية النتيجة، إلا أنه يختص بالأحداث " **النادرة الوقوع** " في وحدة قياسية معينة، على سبيل المثال:

- ✓ عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات كتاب.
- ✓ عدد حوادث السيارات خلال أسبوع معين.
- ✓ عدد الحشائش الضارة في المتر المربع من حقل قمح مثلاً.
- ✓ عدد الانتحارات خلال سنة في قُطر من الأقطار.

وفي هذه الحالات جميعا، عادة ما نجد أن N كبيرة جداً، بينما " p " (احتمال النجاح) صغيرا جداً.

➢ **قانون احتماله:** نفرض أن X متحول عشوائي متقطع، نقول أن X خاضع لتوزيع بواسون ذي المعلمة λ إذا كان قانون احتماله كما يلي :

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}\, e^{-\lambda}}{x_i!}$$

حيث : λ عدد ثابت يمثل متوسط ظهور النجاحات. (التوقع الرياضي)

ونكتب: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

➢ **مميزاته العددية :**

- ✓ **التوقع الرياضي:** $E(x) = \lambda = NP$
- ✓ **التباين** : $V(X) = \lambda$

➢ العلاقة بين التوزيعين الثنائي و البواسوني:

إذا كان N كبيرا في التوزيع الثنائي، بينما الاحتمال " p " لظهور حدث ما قريبا من الصفر (أي أن q =1- p قريب من 1) فإننا نعتبر هذا الحدث " نادراً " ، وعمليا سوف نعتبر الحدث نادراً إذا كان عدد الاختبارات على الأقل 50 (N≥50) بينما NP<5 ، في مثل هذه الظروف يكون التوزيع الثنائي قريبا جداً من التوزيع البواسوني الذي يمكن استخدامه كتقريب ممتاز للتوزيع الثنائي.

__مثال 04__: إذا كان 3٪ من مصابيح الكهرباء في أحد المصانع معيبةً، نفرض أننا سحبنا عينة من 100 مصباح، أوجد احتمال أن يكون فيها:

1- مصباح واحد معيب.

2- مصباحان معيبان.

3- أربعة مصابيح معيبة.

4- أعد حساب هذه الاحتمالات بتطبيق التوزيع الثنائي.

5- ماذا تلاحظ.

__الجواب__: من المعطيات نلاحظ أن:

- *الظاهرة ثنائية (المصباح إما معيب وإما غير معيب، والنجاح هو الحصول على مصباح معيب).*
- *التوقع الرياضي أقل من 5 ($\lambda = Np = (0.03)100 = 3 < 5$).*
- *حجم العينة أكبر من 50 (N= 100).*

كل ذلك يدعونا لتطبيق التوزيع البواسوني بدلا عن التوزيع الثنائي، حيث $\lambda = 3$، ونكتب $X \backsim \mathcal{P}(3)$

1- $P(X=1) = \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = \mathbf{0.1494}$

2- $P(X=2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = \mathbf{0.2240}$

3- $P(X=4) = \frac{3^4 e^{-3}}{4!} = \mathbf{0.1680}$

4- إعادة حساب هذه الاحتمالات بتطبيق التوزيع الثنائي:

- $P(X=1) = C_{100}^{1} p^1 q^{99} = \frac{100!}{1!(100-1)!}(0.03)^1(0.97)^{99} = \mathbf{0.1471}$
- $P(X=2) = C_{100}^{2} p^2 q^{98} = \frac{100!}{2!(100-2)!}(0.03)^2(0.97)^{98} = \mathbf{0.2251}$
- $P(X=4) = C_{100}^{4} p^4 q^{96} = \frac{100!}{4!(100-4)!}(0.03)^4(0.97)^{96} = \mathbf{0.1706}$

5- واضح جليا تقاربُ نتائج التوزيعين، وواضح أيضا أن استخدام التوزيع الثنائي مع الاحداث النادرة أصعب واعقد من استخدام التوزيع البواسوني، ولهذا يُفضل استخدام هذا الأخير في مثل هذه الحالات.

__مثال 05:__ تتلقى تحويلة الهاتف في الجامعة المكالمات الخارجية بين الساعة 10h والساعة 12h , بمعدل ثلاث مكالمات في الدقيقة.

__المطلوب__: احسب احتمال أن يكون بين الساعة 10.55h و 10.56h :

1- ولا مكالمة.　　2- مكالمة واحدة.　　3- على الأقل مكالمتين.　　4- على الأكثر مكالمتين

الجواب: من المعطيات نلاحظ:

- *أننا أمام ظاهرة ثنائية، النجاحُ فيها هو وصول المكالمة.*
- *التوقع الرياضي أقل من 5 ($\lambda = 3 < 5$).*
- *N أكبر من 50، فهو غير محدد.*

كل ذلك يدعونا لتطبيق التوزيع البواسوني بدلا عن التوزيع الثنائي، حيث $\lambda = 3$، ونكتب $X \sim \mathcal{P}(3)$

1. $P(X = 0) = \frac{3^0\, e^{-3}}{0!} = \mathbf{0.0498}$ *(ولا مكالمة)*
2. $P(X = 1) = \frac{3^1\, e^{-3}}{1!} = \mathbf{0.1494}$ *(مكالمة واحدة)*
3. $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$ *(على الأقل مكالمتين)*

$$= 1 - \left(\frac{3^0\, e^{-3}}{0!} + \frac{3^1\, e^{-3}}{1!}\right) = 1 - (0.0498 + 0.1494) = \mathbf{0.8008}$$

4. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{3^0\, e^{-3}}{0!} + \frac{3^1\, e^{-3}}{1!} + \frac{3^2\, e^{-3}}{2!} = (0.0498 + 0.1494 + 0.2240 = \mathbf{0.4232}$$

➢ **تابع توزيع بواسون:** $F(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=0}^{x_k} \frac{\lambda^{x_i}\, e^{-\lambda}}{x_i!}$

ملاحظة:

-1 معرفة قيمة λ مسألة ضرورية لحساب الاحتمال وفق قانون بواسون.

-2 يمكن استخراج قيمة الاحتمال أو تابع التوزيع البواسوني من خلال جداول إحصائية أُعدت لذلك.

4. التوزيع فوق الهندسي: (التوزيع الهندسي الزائدي) *Distribution hypergéométrique*

➢ **تعريفه:** عند دراستنا للتوزيع الثنائي يتضح لنا أن عمليات السحب لتكْوين العينة كانت تتم مع إعادة العُنصر المسحوب الى المجتمع، وهذا يترتب عنه أمران، يعتبران بمثابة شرطي تطبيق التوزيع الثنائي، هما:

- أن جميع السَّحبات (أو التجارب) مستقلة عن بعضها البعض.
- أن احتمال النجاح في تجربة واحدة p ثبات.

لكن هناك بعض الحالات لا يمكن أن يتم فيها السحب مع الإعادة (كإجراء فحص حول الإصابة بمرض معين) وهنا يختل شرطا تطبيق التوزيع الثنائي (استغلال التجارب، وثبات p) فنلجأ الى تطبيق قانون آخر يسمى قانون فوق الهندسي.

➢ **قانون احتماله** : إذا كان X متغيرا عشوائيا خاضعا للتوزيع فوق الهندسي، ذي المعالم N، M، n فإننا نكتب $X \backsim H(N, M, n)$، ويعطى قانون احتماله كما يأتي:

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

حيث:

K: عدد النجاحات.

M: عدد العناصر التي يَنْصَبُّ عليها الاهتمام في المجتمع.

N: حجم المجتمع Ω.

n: حجم العينة المسحوبة.

➢ **ميزاته العددية :**

✓ **التوقع الرياضي:** $E(x) = n.P = n\left(\frac{M}{N}\right)$

✓ **التباين:** $V(x) = \frac{N-n}{N-1}.n.P.q$

وهذا التباين أصغر من تباين التوزيع الثنائي. يسمى المقدار $\frac{\mathrm{N-n}}{\mathrm{N-1}}$ "مؤثرَ عدم الإعادة".

مثال06: *تتكون هيئة التدريس في أحد فروع الجامعة من أربعة كيميائيين وسبعة فيزيائيين، سحبنا -بصورة عشوائية- لجنة مؤلفة من أربعة أساتذة. لنفرض أن X متحول عشوائي يمثل عدد الكيميائيين في هذه اللجنة.*

المطلوب: *حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير X.*

الجواب: *نلاحظ أن تجربة سحب هذه اللجنة هي تجربة فوق هندسية، لأن:*

- *التجربة ثنائية النتيجة، فكل أستاذ مسحوب إما أن يكون كيميائيا وإما أن يكون فيزيائيا.*
- *السحب يتم دون إعادة، إذ لا يعقل سحب أستاذ ثم اعادته لأن هذا من شأنه جعل تكرار سحب الأستاذ نفسه حدثا ممكنا، وعلى ذلك فالسحب دون إعادة سيترتب عليه اختلال الشرطين السابقين لتطبيق التوزيع الثنائي.*

وعلى ذلك فإن X (عدد الكيميائيين في اللجنة) خاضع للتوزيع فوق الهندسي $X \backsim H(11,4,4)$*، قيمه الممكنة هي:*

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_4^0 C_{11-4}^{4-0}}{C_{11}^4} = \mathbf{0.106}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_7^3}{C_{11}^4} = \mathbf{0.424}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_7^2}{C_{11}^4} = \mathbf{0.380}$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3C_7^1}{C_{11}^4}=\mathbf{0.085}$$

$$P(X=4)=\frac{C_4^4C_7^0}{C_{11}^4}=\mathbf{0.003}$$

ومن هنا يمكننا وضع التوزيع الاحتمالي للمتغير X كما يأتي:

الجدول رقم09: التوزيع الاحتمالي للمتغير فوق الهندسي X

x_i	0	1	2	3	4	المجموع[1]
$p(x_i)$	0.106	0.424	0.380	0.085	0.003	**1.000**

المصدر: حلول المثال 06.

ب- التوزيعات الاحتمالية الخاصة للمتغير المستمر:

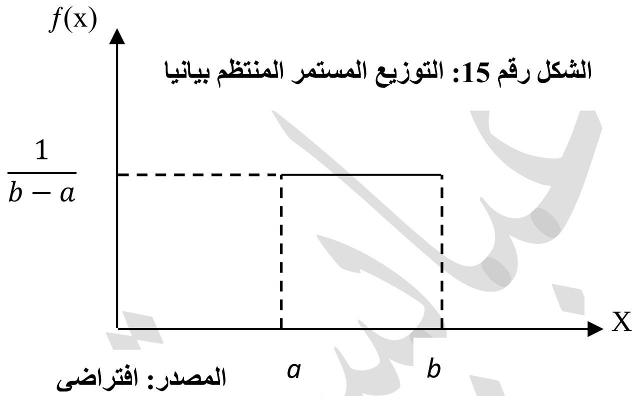
1. التوزيع المنتظم:

- **تعريفه:** لنفرض أن لدينا متحولاً عشوائيا مستمرا X معرفاً على المجال [a , b] ، فإذا كانت كثافةُ توزُّعِه تحافظ على قيمة ثابتة في هذا المجال وتساوي الصفر خارجه، نقول أن X خاضع لتوزيع منتظم.
- **قانون احتماله:** انطلاقا من التعريف السابق، نعرف قانون التوزيع المستمر المنتظم كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \dots\dots\ X\in[a\,.\,b]\\ 0 & \dots\dots\ X\notin[a\,.\,b]\end{cases}$$

- **تمثيله البياني:** أنظر الشكل رقم 15.

الشكل رقم 15: التوزيع المستمر المنتظم بيانيا



المصدر: افتراضى

- **خواصه:** ككل توزيع احتمالي، لا بد من توافر ما يلي:

$$*\quad f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b-a}\geq 0$$

وهذا محقق دائماً طالما أن $a<b$

$$*\quad \int_a^b f(x)dx=1$$

- **تابع التوزيع المنتظم:**

$$F(x_k)=P(X\leq x_k)=\int_a^{x_k}f(x)dx=\int_a^{x_k}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}x|_a^{x_k}=\frac{x_k-a}{b-a}$$

أي أن: $F(b)=P(X\leq b)=\frac{b-a}{b-a}=1$ ومنه فإن تابع التوزيع يأخذ الصورة التالية :

$$F(x_k)=\begin{cases}0 & \dots\dots & x_k<a\\ \dfrac{x_k-a}{b-a} & \dots\dots & a\leq x_k<b\\ 1 & \dots\dots & x_k\geq b\end{cases}$$

[1] قد يلاحظ الطالب أن هذا المجموع لا يساوي واحد بالضبط بل يساوي 0.998 وهذا ببساطة راجع لمشاكل التقريب فقط.

أما الاحتمالات الأخرى فتحسب بتوظيف تابع التوزيع كما يلي:

$$* \ P(X > x_k) = 1 - P(X \leq x_k) = 1 - F(x_k) = \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{x_k - a}}{\boldsymbol{b - a}}$$

$$* \ P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2-a}{b-a} - \frac{x_1-a}{b-a} = \frac{\boldsymbol{x_2-x_1}}{\boldsymbol{b-a}}$$

أي الاحتمال يساوي طول المجال الجزئي على طول المجال الكلي.

➢ **المميزات العددية للمتغير المستمر الخاضع للتوزيع المنتظم:**

✓ **التوقع الرياضي:** $\boldsymbol{E(x)} = \frac{\boldsymbol{b+a}}{\boldsymbol{2}}$ حيث ينطبق *E(x)* على منتصف المجال *[a . b]* في محور السينات.

<u>ملاحظات:</u>

- إذا كان *X* معرفاً في المجال *[-a , +a]* فإن *E(x) = 0* .
- إذا كان $X \in [a.b]$ فإن $E(x) \in [a.b]$.
- بسبب التناظر في هذا التوزيع فإن التوقع الرياضي والوسيط متساويان بينما ليس لهذا التوزيع منوالا.

✓ **التباين:** $V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$

2. التوزيع الطبيعي: *Distribution Normale*

➢ **تعريفه:** يُعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة وأكثرها استخداماً في نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي، وذلك لعدة اعتبارات أهمها:

✓في الكثير من الحالات التطبيقية - اجتماعية كانت أم اقتصادية – يكون توزيع المتحول العشوائي طبيعيا، كطول الإنسان، وزنه، عمره، معدل ذكائه، ...

✓معظم قوانين التوزيعات الاحتمالية -المتقطعة منها والمستمرة– تؤول إلى هذا التوزيع عند توافر شروط معينة.

✓تعتمد اختبارات الفروض الإحصائية ومجالات الثقة على التوزيع الطبيعي[1].

➢ **قانون احتماله:** نقول أن المتحول العشوائي X خاضع للتوزيع الطبيعي، ذي المعلمتين μ و σ (ونكتب: $X \leadsto \mathcal{N}(\mu , \sigma)$) إذا كانت دالة كثافته المعرفة في المجال $]-\infty, +\infty[$ كما يلي:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

حيث: *e = 2.71828*

π = 3.14

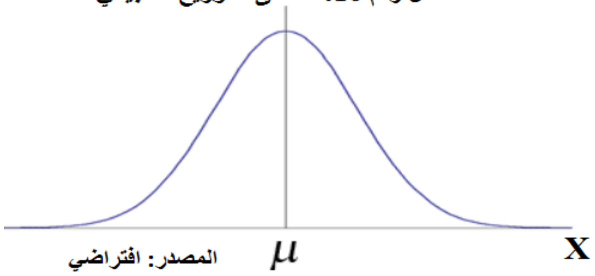
σ : الانحراف المعياري. *μ: التوقع الرياضي.*

[1] هذا الموضوع سيتطرق له الطلبة بالتفصيل في السنة الثانية.

- **تمثيله البياني:**

انظر الشكل رقم 16.

الشكل رقم 16: منحنى التوزيع الطبيعي



المصدر: افتراضي

- **خواصه:**

✓ منحنى التوزيع الطبيعي ناقوسي الشكل.

✓ مهما كانت قيمة X فإن $f(x) \geq 0$ وهذا لأن المنحنى دوما فوق محور السينات (المحور الافقي).

✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (أي أن مجموع المساحة الكلية تحت المنحنى دوما يساوي 1) .

✓ منحناه متناظر حول المحور العمودي الذي يشمل μ على المحور الأفقي أي أن هذا العمود يقسم المساحة الكلية الى قسمين متساويين بحيث: $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = \frac{1}{2}$

✓ يمتد طرفا المنحنى الى مالانهاية في الاتجاهين دون أن يتقاطعا مع المحور الأفقي إلا في اللانهاية.

✓ يصل إلى قمته (أعلى احتمال) عندما $X = E(x)$، وبما أن المنحنى متناظر فإنه عند هذه النقطة نجد أن: $X = E(x) = M_e = M_o$.

✓ يتصف منحناه بأنه معتدل؛ أي أنه لا مدبب ولا مفلطح وغير ملتوٍ، ولهذا يسمى أحياناً التوزيع المعتدل.

✓ في التوزيع الطبيعي دوماً نجد النسب التالية:

- المساحة المحصورة في المجال $E(x) \pm \sigma$ = ‎68.27٪ من المساحة الكلية.
- المساحة المحصورة في المجال $E(x) \pm 2\sigma$ = ‎95.45٪ من المساحة الكلية.
- المساحة المحصورة في المجال $E(x) \pm 3\sigma$ = ‎99.73٪ من المساحة الكلية.
- المساحة المحصورة في المجال $E(x) \pm {}^{2}/_{3}\,\sigma$ = ‎50.00٪ من المساحة الكلية.

- **القيم العددية المميزة للمتغير العشوائي الطبيعي:**

✓ **التوقع الرياضي:** $E(x) = \mu$

✓ **التباين:** $V(x) = \sigma^2$

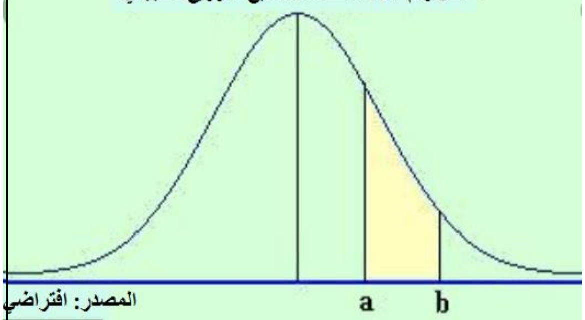
- **تابع التوزيع الطبيعي:**

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_k} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ومنه يمكننا حساب احتمال أن يقع X بين قيمتين a , b كما يلي :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

الشكل رقم 17: استخدامات تابع التوزيع الطبيعي.



المصدر: افتراضي

- **قانون التوزيع الطبيعي المعياري:**

التوزيع الطبيعي المعياري هو حالة خاصة من التوزيع الطبيعي، نحصل عليه باستبدال المتغير العشوائي الطبيعي X بمتغير عشوائي طبيعي معياري Z بحيث: $Z = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x}$

يسمى Z كذلك المتغير العشوائي المركزي المختصر، الخاضع للتوزيع الطبيعي المعياري ذي المعلمتين $\mu_z = 0$ و $\sigma_z = 1$، ونكتب: $Z \sim \mathcal{N}(0\,,1)$

وعليه تكون دالة كثافة Z كما يلي: $/Z\,\epsilon]-\infty\,.+\infty[$ $\qquad f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$

وخصائصه هي نفسها خصائص التوزيع الطبيعي العادي.

- **أهمية التوزيع الطبيعي المعياري:**

لحساب الاحتمالات دون استخدام التكاملات نلجأ عادة إلى إنشاء جداول احصائية لهذا الغرض، لكن في حالة التوزيع الطبيعي نلاحظ أنه كلما تغير μ أو σ تغير التوزيع وهذا يتطلب جدولاً جديداً، لذلك ظهرت الحاجة إلى توزيع معياري واحد، وبالتالي جدول معياري واحد لكل الحالات المختلفة، وهنا تكمن أهمية التوزيع الطبيعي المعياري.

- **تابع التوزيع للمتغير المعياري Z :**

$$F(z_k) = P(Z \leq z_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_k} e^{\frac{-z}{2}}\, dz$$

وباعتبار أن: $Z = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x}$ فإن $F(z_k) = F(x_k)$

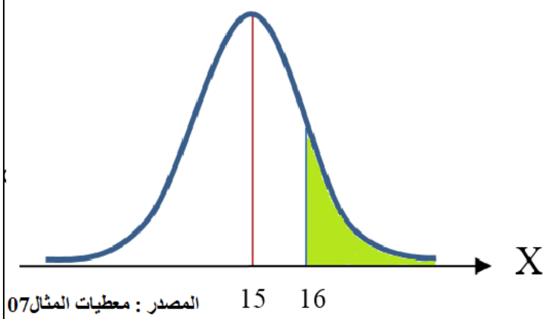
أي أن المساحة تحت المنحنى الطبيعي المحصورة بين $-\infty$ و x_k هي نفسها المحصورة بين $-\infty$ و z_k. ولقد وضع الإحصائيون جداول لحساب تابع التوزيع المعياري أيضاً، ولإبراز أهمية هذه الجداول نورد المثال الآتي:

مثال 07: *إذا كانت نقاط الطلبة تخضع التوزيع الطبيعي بتوقع رياضي يساوي 15 وانحراف معياري يساوي 1، أوجد نسبة الطلبة الذين تفوق نقاطهم 16 في مادة الإحصاء.*

__الجواب:__ نلاحظ أن $X \sim \mathcal{N}(15\,,1)$ وأن المطلوب هو البحث عن المساحة تحت المنحنى من 16 إلى $+\infty$ المبينة باللون الأخضر في الشكل رقم 18.

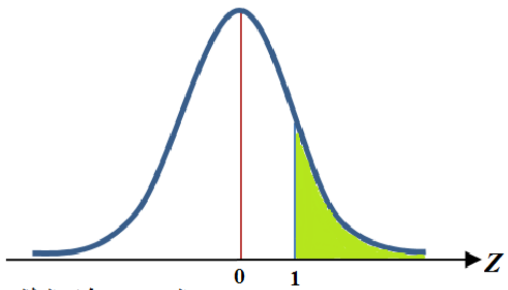
وللقيام بذلك علينا أن ننتقل من هذا التوزيع إلى التوزيع الطبيعي المعياري الذي يقابله، حيث: $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{16-15}{1} = 1$ (انظر الشكل رقم 19).

الشكل رقم 18: توزيع نقاط الطلبة.



المصدر : معطيات المثال07

الشكل رقم 19: التوزيع الطبيعي المعياري لنقاط الطلبة.



المصدر : معطيات المثال07

إن نسبة الطلبة المحصورة نقاطهم في هذا المجال (أكبر من 16) هي نفسها احتمال وجود طالب نقطته أكبر من 16. وعلى ذلك، وبالاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي المعياري الموجود في الملحق رقم 02:

$$P(X \geq 16) = P(Z \geq 1) = P(0 \leq Z \leq +\infty) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = \mathbf{0.1587} = \mathbf{15.87\%}$$

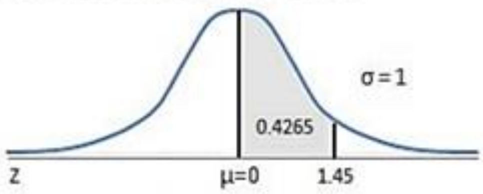
<u>لنشرح مصادر هذه النسب أو الاحتمالات، وكيفية استخدام الجدول:</u>

- $P(0 \leq Z \leq +\infty) = 0.5$ *لأن المساحة الإجمالية -كما نعلم- تساوي 1، إذن فالمساحة من 0 الى $+\infty$ تساوي النصف.*
- $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ *استخرجناها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الموجود في الملحق رقم 02، والجدول رقم 10 أسفله يُبين مقطعا من هذا الملحق. (انظر بالضبط الخانة الناتجة عن تقاطع العمود 2 مع السطر 12).*

الجدول رقم 10: مقطع من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

Areas Under the One-Tailed Standard Normal Curve

This table provides the area between the mean and some Z score.
For example, when Z score = 1.45 the area = 0.4265.



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830

المصدر: الملحق رقم 02.

- *يتكون جدول التوزيع الطبيعي المعياري (أو جدول Z) مما يأتي:*[1]

✓ ***العمود الأول:*** *يضم الجزء الأول من قيمة Z والمتكونة من الجزء الصحيح والرقم الأول بعد الفاصلة.*

✓ ***السطر الأول:*** *يضم الجزء الثاني من قيمة Z والمتكونة من الرقم الثاني بعد الفاصلة.*

✓ ***بقية الخانات:*** *تضم المساحات أو الاحتمالات الموافقة للمساحة المضللة من الشكل المبين أعلى الجدول، والمحصورة عادة بين 0 وقيمة Z.*[2] *تنتج هذه الخلايا أو الخانات عن تقاطع الأعمدة والأسطر حسب قيمة Z ؛ مثلا عندما Z=1.15 فإننا نذهب للخانة الناتجة عن تقاطع السطر رقم 13 (أين الجزء الأول من Z يساوي 1.1) والعمود رقم 07 (أين الجزء الثاني من Z يساوي 0.05) فنجد المساحة (الاحتمال) بين 0 و 1.15 تساوي 0.3749*

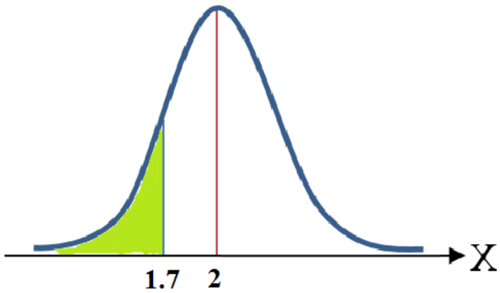
---

[1] قد تختلف هذه المكونات من جدول لآخر، إلا أن النتيجة المتوصل إليها باستخدامها جميعا ستكون واحدة.

[2] وقد نجد اختلافا في جداول Z أخرى، كأن تكون المساحة المضللة من $-\infty$ إلى قيمة موجبة من قيم Z.

مثال 08 : ركبت في إحدى السيارات بطارية من صنع وطني، فإذا علمت أن عمر هذا النوع من البطاريات يتوزع طبيعيا بمتوسط عمر إنتاجي يساوي سنتين وانحراف معياري يساوي 0.3 سنة، ما هو احتمال هذه البطارية صالحة لمدة لا تزيد عن 1.7 سنة.

الشكل رقم 20: توزيع أعمار البطاريات.

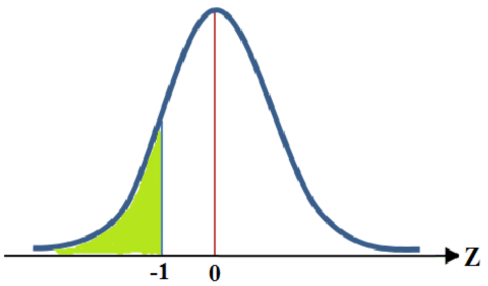


المصدر: معطيات المثال رقم 08.

الجواب: : نلاحظ أن $X \sim \mathcal{N}(2\,,0.3)$ وأن المطلوب هو البحث عن المساحة تحت المنحنى من $(-\infty)$ إلى 1.7 المبينة باللون الأخضر في الشكل رقم 20.

وللقيام بذلك علينا أن ننتقل من هذا التوزيع إلى التوزيع الطبيعي المعياري الذي يقابله، حيث: $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{1.7-2}{0.3} = (-1)$ (انظر الشكل رقم 21).

الشكل رقم 21: التوزيع الطبيعي المعياري لعمر البطاريات.



المصدر: معطيات المثال رقم 08.

وعلى ذلك، وبالاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي المعياري الموجود في الملحق رقم 02 فإن:

$$P(X \le 1.7) = P(Z \le -1) = P(Z \ge 1) \quad \text{(بسبب التناظر)}$$

$$= P(0 \le Z \le +\infty) - P(0 \le Z \le 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = \mathbf{0.1587}$$

ملاحظة: على غِرار التوزيع الطبيعي، فإنه في التوزيع المعياري سنجد أن:

- $P(-1 \le Z \le +1) = 68.27\%$
- $P(-3 \le Z \le +3) = 99.73\%$
- $P(-2 \le Z \le +2) = 95.45$
- $P\left(\frac{-2}{3} \le Z \le \frac{+2}{3}\right) = 50.00\%$

- **العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الثنائي:**

في التوزيع الثنائي عندما يكون عدد التجارب N كبيراً جداً فإن هذا سيطرح صعوبة حساب الاحتمال، وفي هذا الإطار لاحظ العالم الرياضي الإنجليزي *De.Moivre* أن التوزيع الطبيعي هو النهاية الحدية لتوزيع الثنائي، وهذا ما أكده العالم الفرنسي *Laplass*.

أي أنه كلما كانت N كبيرة، بينما لم يكن p ولا q قريبين جداً من الصفر، فإن التوزيع الثنائي يقترب كثيراً التوزيع الطبيعي، حيث يمكن استخدام هذا الأخير بديلا عن الأول، أين يكون المتغير العشوائي المعياري كما يلي: $Z = \frac{x-NP}{\sqrt{NPq}}$ ، ونعتبر أن هذا يتحقق إذا كان : $N \ge 50$ و $NP > 5$ و $Nq > 5$ بعبارة أخرى: عدد التجارب يفوق 50 تجربة وكل من NP و Nq كلاهما أكبر من 5 .

➢ **العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع بواسون:**

طالما أن هناك علاقة بين التوزيعين الثنائي و البواسوني من جهة، وعلاقة بين التوزيعين الثنائي والطبيعي من جهة أخرى، فإن هذا الأخير تربطه علاقة أكيدة بالتوزيع البواسوني. فإذا كان لدينا متحول عشوائي خاضع للتوزيع البواسوني بحيث كلما كانت قيمة λ كبيرة جداً ($\lambda \to +\infty$) ، فإن التوزيع البواسوني يؤول إلى التوزيع الطبيعي ذي المتحول العشوائي المعياري Z المعرف كما يلي: $Z = \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$

3. التوزيع الأسي: *Distribution Exponentielle*

➢ **تعريفه:** عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في المسائل المتعلقة بقياس الزمن، أين المتغير العشوائي قيمته عبارة عن لحظة معينة (مفاجئة) على محور الزمن، مثل لحظة النداء للزبون التالي إلى شباك معين (البريد مثلاً)، لحظة انطفاء مصباح كهربائي أثناء الخدمة، لحظة الانتهاء من تصليح آلة... الخ.

وكقاعدة عامة، يُستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما إذا كان لها متوسط يساوي $\frac{1}{\alpha}$ وكانت هذه الظاهرة لا تخضع للتقادم، كما يحدث مثلاً مع عمر الإنسان.[1]

نشير أيضاً إلى أن لهذا التوزيع علاقة بتوزيع "بواسون"، فإذا كان وقوع أحداث معينة يتبع توزيع بواسون، فإن <u>المدة الفاصلة</u> بين وقوع حديثين من هذه الأحداث تتبع التوزيع الأسي، فمثلا إذا كان وصول الزبائن إلى أحد شبابيك خدمة ما يتبع توزيع بواسون، فإن المدة الفاصلة بين وصول كل زبونين إلى الشباك تخضع للتوزيع الأسي.

➢ **قانون احتماله:** نقول إن المتحول العشوائي المستمر الموجب X يخضع للتوزيع الأسي ذي المَعْلَمة α ، ونكتب $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$ ، إذا كان قانون احتماله معرف كما يلي:

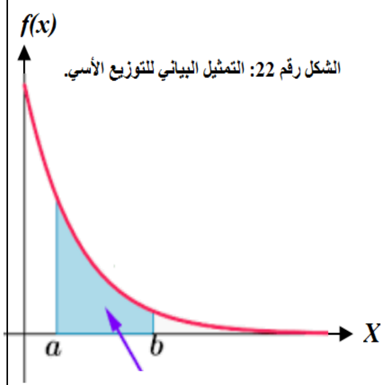
$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \dots\dots \quad X \geq 0 \\ 0 & \dots\dots \quad X < 0 \end{cases} \qquad / \ \alpha > 0$$

➢ **خواصه:** مهما كان X موجباً فإن:

$$*\ f(x) \geq 0 \qquad *\ \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

➢ **تمثيله البياني:** أنظر الشكل رقم 22. حيث يمكن حساب احتمال وقوع X بين a و b:

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \alpha e^{-\alpha x} dx$$



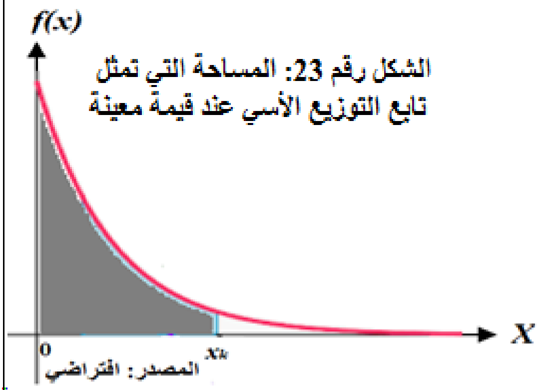
الشكل رقم 22: التمثيل البياني للتوزيع الأسي.

المصدر: http://www.jaicompris.com/lycee/math/probabilite/loi-

[1] فعمر الانسان يمر بثلاث مراحل أساسية: تبدأ بمرحلة الصبا ثم مرحلة قوة الشباب ثم تنتهي بمرحلة الشيخوخة، وهذا مطرد في كل البشر تقريبا.

➢ تابع التوزيع الأسي:

$$F(x_k) = P(X \le x_k) = \int_0^{x_k} f(x)dx = \int_0^{x_k} \alpha e^{-\alpha x}dx$$



الشكل رقم 23: المساحة التي تمثل تابع التوزيع الأسي عند قيمة معينة

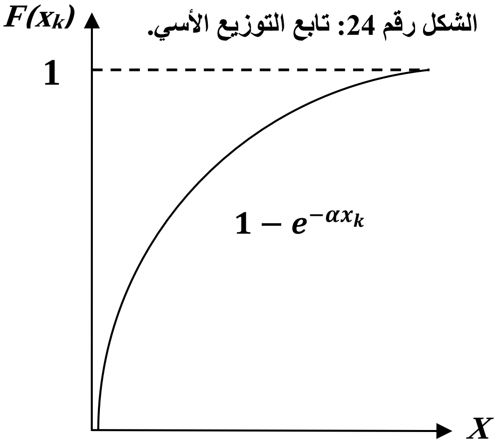
المصدر: افتراضي

وبتبسيط هذا التكامل إلى صورته النهائية نجد أن:

$$F(x_k) = \begin{cases} 0 & x_k < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x_k} & x_k \ge 0 \\ 1 & x_k \to +\infty \end{cases}$$

يمكن تمثيل تابع التوزيع $F(x_k)$ بيانيا وفقا لما يظهر في الشكل رقم 24.

الشكل رقم 24: تابع التوزيع الأسي.



المصدر: السعدي رجال، نظرية الاحتمالات، ج 2.

➢ المميزات العددية للمتغير الأسي:

- التوقع الرياضي: $E(x) = \frac{1}{\alpha}$
- التباين: $V(x) = \frac{1}{\alpha^2}$

مثال09: *تتلقى ورشة لتصليح الآلات الكاتبة في المتوسط 5 مكالمات في الساعة، فإذا حدَّدنا انطلاق الزمن في لحظة معينة x_1 , ما هو احتمال تلقي مكالمة خلال نصف الساعة القادم؟*

الجواب: *لنفرض أننا الآن عند اللحظة x_1، وأطلقنا العداد الزمني "كرونومتر". إن لحظة وصول أول مكالمة خلال نصف الساعة القادم هي متغير عشوائي خاضع للتوزيع الأسي ذي المعلمة $\alpha = \frac{1}{5}$ (لأن $E(x) = \frac{1}{\alpha} = 5$) ونكتب $X \sim \mathrm{e}(\frac{1}{5})$.*

إن تلقي مكالمة في غضون نصف ساعة معناه أن التوقيت الذي سيسجل على "الكرونومتر" لحظة وصول المكالمة سيكون أقل من أو يساوي نصف ساعة، ومنه احتمال وصول هذه المكالمة يحسب كما يلي:

$$p(X \le 0.5) = F(0.5) = 1 - e^{-(\frac{1}{5})0.5} = 1 - 0.4094 = \mathbf{0.5906}$$

4. توزيع فـــــامـــــاَ : *Distribution Gamma*

➢ تعريفه: لقد أشتَق توزيعُ فـــــامـــــاَ اسمَه من دالة رياضية معروفة تدعى "الدالة فـــــامـــــاَ" والتي لها دورٌ مهم في تعريف العديد من التوزيعات الاحتمالية مثل: توزيع فـــــامـــــاَ، توزيع "بيتـــاَ"، توزيع كـــاي مربع، فيشر، ستورنت... الخ. ولهذا سنتطرق باختصار إلى هذه الدالة الموجبة قبل دراسة توزيع فـــــامـــــاَ.

- **دالــة قـــامـــاَ:** يرمز للدالة قـــامـــاَ ذات المعلمة الموجبة تماماً "n" بالرمز Γ وتعرف كما يلي:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1}\, e^{-x} dx$$

- **خصائص دالة قـــامـــاَ:**

1) $\Gamma(\mathrm{n}) = (\mathrm{n}-1)\Gamma(\mathrm{n}-1)$
2) $\Gamma(\mathrm{n}) = (\mathrm{n}-1)!$
3) $\Gamma(1) = 1$
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

<u>مثال10</u>: *أحسب ما يلي:*

1. $\Gamma(4.5)$
2. $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} dx$

<u>الجواب</u>: *لنوظف خصائص الدالة Γ:*

1. $\Gamma(4.5) = 3.5\Gamma(3.5)$
$\Gamma(3.5) = 2.5\Gamma(2.5)$
$\Gamma(2.5) = 1.5\Gamma(1.5)$
$\Gamma(1.5) = 0.5\Gamma(0.5)$
$\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$

وعلى ذلك:

$$\Gamma(4.5) = (3.5)(2.5)(1.5)(0.5)(\sqrt{\pi}) = \mathbf{11.63}$$

2. $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = \mathbf{6}$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} dx = \int_0^{+\infty} x^{(-1/2)} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} e^{-x} dx = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = \mathbf{1.77}$

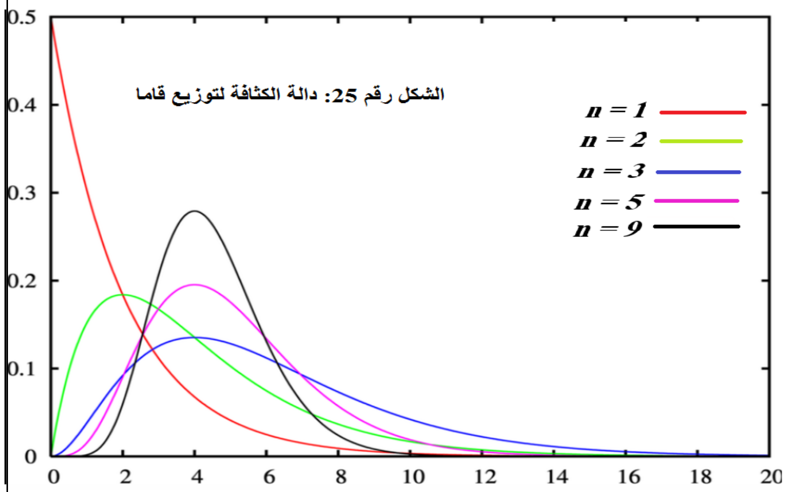
- **قانون احتمال توزيع قـــامـــاَ:** نقول عن متحول عشوائي X أنه خاضع لتوزيع قـــامـــاَ ذي المعلمين الموجبين تماماً α, n ، ونكتب $X \backsim \Gamma(\alpha, n)$ ، إذا كان قانون احتماله معرفاً كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)}\alpha^n . x^{n-1} . e^{-\alpha x} & \dots\dots \quad X \geq 0 \\ 0 & \dots\dots \quad X < 0 \end{cases} \qquad /n > 0, \alpha > 0$$

- **القيم العددية المميزة لمتغير توزيع قـــامـــاَ:**
  - **التوقع الرياضي:** $E(x) = \frac{n}{\alpha}$
  - **التباين:** $V(x) = \frac{n}{\alpha^2}$

- **حالة خاصة:** إذا كان $n=1$ فإن توزيع قـــامـــاَ يصبح التوزيع الأسي.

➢ **الشكل البياني لتوزيع قـــامـاَ:** يأخذ توزيع قــاماَ أشكالا مختلفة حسب قيمة المعلمة n، حيث كلما كبرت قيمة n كلما آل المنحنى الى التوزيع الطبيعي. (أنظر الشكل رقم 25).



المصدر: https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_Gamma

➢ **خواصه:**

$$* \ f(x) \geq 0$$

$$* \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$$

➢ **تابع توزيع قـــــامــــاَ :**

$$F(x_k) = p(X \leq x_k) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{x_k} x^{n-1} \, e^{-x} \, dx$$

نظرية: إذا كان لدينا متحولين عشوائيين X_1, X_2 خاضعين لتوزيع قـاما بمعلمتين n_1 , n_2 على الترتيب فإن المتحول العشوائي X الذي يساوي (X_1+X_2) خاضع هو الآخر لتوزيع قـــامــــا ذي المعلمة n حيث : $n=n_1+n_2$.

5. توزيع بيتــــا: *Distribution Bêta*

➢ **تعريفه:** على غرار توزيع قــــامــــا فقد أشتُق اسمُ هذا التوزيع من دالة رياضية معروفة هي " دالة بيتــــا " ولهذه الدالة علاقة وطيدة بدالة قــــامــــا.

➢ **دالة بيتــــا:** تُعرّف الدالة بيتــــا ذات المعلمتين الموجبتين تماماً m , n كما يلي:

$$\beta \ (m \, , n) = \int_0^1 x^{m-1} \, (1-x)^{n-1} dx$$

➢ **العلاقة بين الدالتين " قــــامــــا " و " بيتـــــا":**

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \, . \, \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

➢ **خواص الدالة " بيتــــا "**

$$* \ \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi \qquad * \ \beta(1{,}1) = 1 \qquad * \ \beta(m \, , n) = \beta(n \, , m)$$

➢ **قانون احتمال توزيع بيتـــــا:** نقول أن المتحول العشوائي X خاضع لتوزيع بيتــــا ذي المعلمتين الموجبتين تماما m , n، ونكتب: $X \backsim \beta(m, n)$، إذا كانت دالة كثافته معرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta(m,n)}.x^{m-1}.(1-x)^{n-1} \dots\dots\ 0<X<1\\ 0 \qquad\qquad \text{فيما عدا ذلك} \dots\dots\end{cases}$$

➢ **خواص توزيع بيتـــــــا**: $*\ f(x)\geq 0$ $\qquad *\int_0^1 f(x)dx=1$

➢ **المميزات العددية لمتغير توزيع بيتـــــا**:

- التوقع الرياضي: $E(x)=\frac{m}{m+n}$
- التباين: $V(x)=\frac{m.n}{(m+n)^2.(m+n+1)}$

ملاحظة : انطلاقا من العلاقة بين الدالتين Γ و β يمكن كتابة دالة كثافة β بدلالة Γ كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\Gamma(n)}.x^{m-1}.(1-x)^{n-1} \dots\dots\ 0<X<1\\ 0 \qquad\qquad \text{فيما عدا ذلك} \dots\dots\end{cases}$$

➢ **تابع توزيع بيتـــــــا**:

$$F(x_k)=\frac{1}{\beta(m,n)}\int_0^{x_k} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

6. توزيع كاي - مربع χ^2 :

➢ **تعريفه:** اكتشف العالم *Helmert* عام 1876م ثم تطرق له فيما بعد العالم كارل بيرسون عام 1900م وأدخل الرمز اليوناني χ لأول مرة عام 1905م.

ويعتبر هذا التوزيع من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة، المستخدمة بكثرة في مجال التقدير واختبارات الفروض من خلال مقارنة مجموعة من المشاهدات مع ما يقابلها نظريا، كما يستعمل في اختبار جودة التوفيق (L'ajustement) وكذا استقلال جداول التوافق.

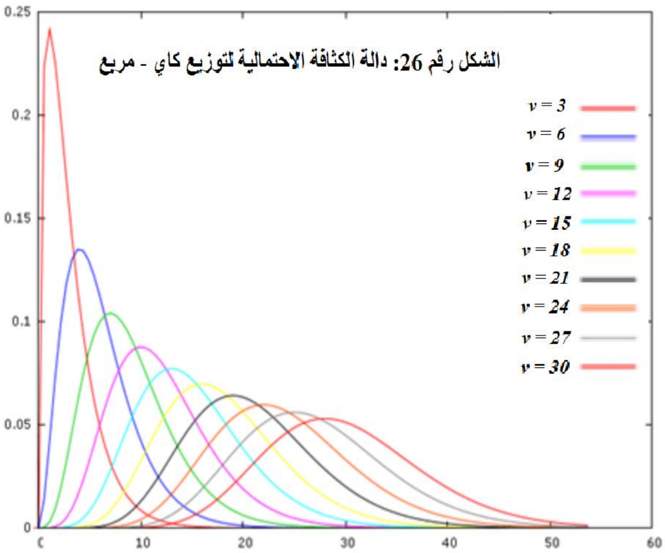
➢ **قانون توزيعه احتمالي:** إذا كان X متحولا عشوائيا موجبا خاضعا لتوزيع كاي - مربع، ذي المعلمة الموجبة v (ونكتب: $X \backsim \chi^2\ (v)$) فإن دالة كثافته معرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2)^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}.e^{-\left(\frac{x}{2}\right)}.x^{\frac{v}{2}-1} \dots\dots\ X\geq 0\\ 0 \qquad\qquad \text{ذلك عدا} \dots\dots\end{cases}$$

حيث: v : عدد صحيح موجب يعكس عدد درجات الحرية، ويرمز له أحيانا بالرمز dl أو df.

Γ: الدالة قـــــامـــــا.

➢ **شكله البياني:**



المصدر: http://www.jybaudot.fr/Stats/khideux.html

يأخذ توزيع χ^2 أشكالا مختلفة حسب قيمة ν حيث يقترب من التوزيع الطبيعي كلما كبرت قيمة ν (أنظر الشكل 26).

➢ **خواصه:**

$$* \ f(x) \geq 0 \qquad\qquad * \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$$

➢ **تابع توزيع χ^2:**

$$F(x_k) = P(\chi^2 \leq x_k) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^{x_k} x^{\frac{\nu}{2}-1} . e^{-\frac{x}{2}}dx$$

➢ **القيم العددية المميزة لـــχ^2:**

- **التوقع الرياضي:** $E(x) = \nu$
- **التباين:** $V(x) = 2\nu$

➢ **جدول قانون توزيع χ^2** : يلخص هذا الجدول قيم χ^2 عند درجات حرية مختلفة وباحتمالات (مساحات) مختلفة حسب الشكل المبين في أعلى الجدول المخصص لذلك. أنظر الملحق رقم 03.

مثال11: *أوجد احتمال أن تكون قيمة χ^2 عند $\nu = 10$:*

أ- أقل من أو تساوي 2.156

ب- أكبر من أو تساوي 15.987

ج- أقل من أو تساوي 23.21

الجواب: *قبل الشروع في الحل، لا بد أولا من شرحٍ مُبسطٍ لكيفية استخدام الجدول:*

يتكون جدول توزيع كاي – مربع- مما يأتي:[1]

- ✓ ***العمود الأول:*** *يضم قيم درجات الحرية dl أو df أو ν. (هذه هي الرموز المعتادة للتعبير عن درجة الحرية).*
- ✓ ***السطر الأول:*** *يضم الاحتمال أو مقدار المساحة المضللة بالأسود في الجهة اليمنى*[2] *من الشكل الموجود أعلى الجدول.*
- ✓ ***بقية الخانات:*** *تضم قيم المتغير كاي – مربع، والموجودة على محور الفواصل. تنتج هذه الخلايا أو الخانات عن تقاطع الأعمدة والأسطر؛ مثلا عندما $\nu=5$ (أو dl كما هو في الجدول أدناه) و $p = 0.900$ فإننا نذهب للخانة الناتجة عن تقاطع السطر رقم 06 (أين درجة الحرية تساوي 5) والعمود رقم 06 (أين المساحة او الاحتمال 0.900) فنجد قيمة كاي-مربع تساوي 1.610 ونكتب $\chi^2_{0.9}(\nu = 5) = 1.610$ (انظر الخانة الملونة بالبرتقالي في الجدول 11).*

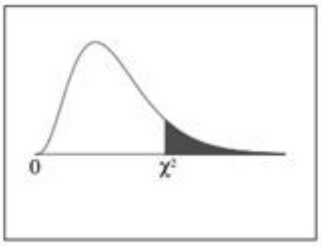
---

[1] قد تختلف هذه المكونات من جدول لآخر، إلا أن النتيجة المتوصل إليها باستخدامها جميعا ستكون واحدة.

[2] وقد نجد اختلافا في جداول كاي-مربع الأخرى، كأن تكون المساحة المضللة في الجهة اليسرى من الشكل.

الجدول رقم 11: جدول توزيع كاي – مربع.

Chi-Square Distribution Table



The shaded area is equal to α for $\chi^2 = \chi^2_\alpha$.

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267

المصدر: https://www.academia.edu/10107363/Chi-square-table

ونعود إلى حل المثال رقم 11:

نذهب إلى السطر المقابل لدرجة حرية تساوي 10، ونبحث عن قيم كاي – مربع التي تقابلها داخل الجدول، وفي كل مرة نجد قيمة نبحث عما يقابلها من احتمال أو مساحة في السطر الأول.

1. $p(\chi^2 \leq 2{,}16) = 1 - p(\chi^2 \geq 2{,}16) = 1 - 0{,}995 = \mathbf{0{,}005}$
2. $p(\chi^2 \geq 16) = \mathbf{0{,}1}$
3. $p(\chi^2 \leq 23{,}21) = 1 - p(\chi^2 \geq 23{,}21) = 1 - 0{,}01 = \mathbf{0{,}99}$

- **خصائص توزيع χ^2 :**

  - إذا كان $\nu = 2$ فإن توزيع χ^2 يصبح التوزيع الأسي، أين $\alpha = \frac{1}{2}$.
  - إذا وضعنا x=2y و $\frac{\nu}{2} = n$ ، فإن توزيع χ^2 يصبح توزيع "Γ" .
  - إذا كان $\nu > 30$ فإن المتحول العشوائي" $\mathfrak{u}$ " المعرف كما يلي:

$\mathfrak{u} = \sqrt{2x^2} - \sqrt{2\nu - 1}$ خاضعٌ تقريباً إلى التوزيع الطبيعي المعياري، حيث يمكن إيجاد قيمة $\mathfrak{u}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، وتعويضها في القانون التالي لإيجاد قيمة χ^2 عند احتمال معين p :

$$\chi^2{}_p = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{u}_p + \sqrt{2\nu - 1}\right]^2$$

مثال12: حدد قيمة $\chi^2_{0.99}$ إذا كان $\nu = 60$.

الجواب: *لنستخدم فكرة اقتراب توزيع كاي-مربع من التوزيع الطبيعي لأن* $\nu > 30$

II.7. توزيع ستورنت ك

II.1.7. تعريفه : وجد العالم ويليام سيلي قوست w.s.Gosset الملقب بـــــ student أنه لايمكن إجراء عملية إختبار المعنوية test de singnification على العينات الصغيرة بإستخدام التوزيع الطبيعي , رغم خضوع المتحول العشوائي لهذا التوزيع لذلك وضع توزيعا آخر للعينات الصغيرة وأطلق عليه إسم " توزيع ستورنت " .

II2.7. قانون احتماله : إذا كان T متحولا عشوائيا خاضعا لتوزيع ستورنت فإن دالة كثافته تعرف كما يلي :

$$f(t) = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} . \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[1 + \frac{t^2}{\nu}\right]^{\frac{-(\nu+1)}{2}} \right. \qquad \forall t \in]-\infty, +\infty[$$

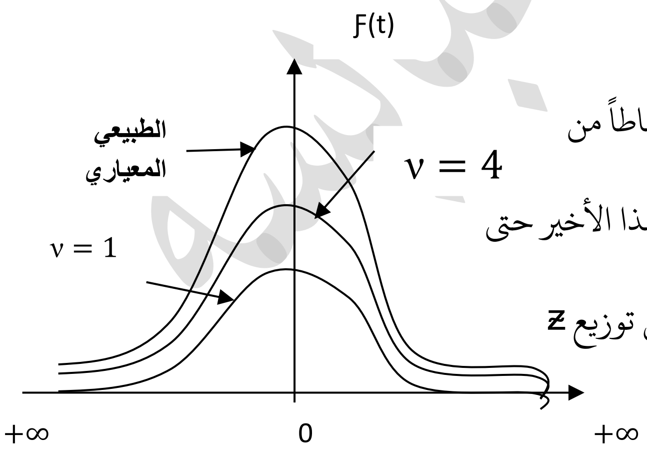
حيث ν درجة الحرية تساوي حجم العبنة الناقص 1 أي $\nu = N - 1$

II.3.7. خواصه :

$* \ f(t) \geq 0$ $\qquad$ $* \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

II.4.7. شكله البياني:

شكله متناظر حول الصفر , و هو أكثر تفلطحا و إنبساطاً من التوزيع الطبيعي وكلما زادت قيمة ν كلما إقترب من هذا الأخير حتى إذا بلغت ν 30 فأكثر يصبح توزيع T وقريباً جدا من توزيع z



II.5.7. تابع توزيع ستورنت :

$$f(t_k) = P(T \leq t_k) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} . \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_{-\infty}^{t_k} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{-(\nu+1)}{2}} dt$$

II.6.7. القيم العددية المميزة لـــــT:

- التوقع الرياضي : $E(t) = 0$
- التباين : $U(t) = \frac{\nu}{\nu-2}$ حيث $\nu > 2$

II.7.7.جدول قانون توزيع T : وضع الإحصائيون جدولاً يساعد على تحديد قيمة T بمعلومية درجة المعنوية α (مستوى الدلالة) ودرجة الحرية ν

مثال : أوجد قيمة T إذا كان $\nu = 7$ و $\alpha = 5\%$.

II.8.7.خصائص توزيع ستورنت :

- منحنى T متناظر حول محور التراتيب حيث :

$P(T \le t) = 1 - P(T \le -t)$ ومنه $P(T \le 0) = P(T \ge 0) = 0.5$

طرفا منحنى T يمتدان الى مالانهاية في الإتجاهين دون أن يتقاطعا مع المحور الأفقي .

II.8.توزيع فيشر "F" :

II.1.8.تعريفه : نقول عن متحول عشوائي F أنه يخضع لتوزيع فيشر إذا كانت دالة كثافته معرفة كما $f(t) =$

$$\begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}.(\nu_1)^{\frac{\nu_1}{2}}.(\nu_2)^{\frac{\nu_2}{2}}.(x)^{\frac{\nu_1}{2}-1}.(\nu_1+\nu_2 x)^{-\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)} & x \ge 0 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث ν_1 ν_2 درجتا الحرية لتوزيع F .

II.2.8.خواصه :

$* \ f(t) \ge 0$ $\qquad$ $* \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$

- إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين $\aleph_1$, $\aleph_2$ خاضعين لتوزيع $\aleph^2$ بدرجتي حرية ν_1 ν_2 على الترتيب

فإن المتحول العشوائي F حيث $F = \frac{\aleph_1/\nu_1}{\aleph_2/\nu_2}$ خاضع لتوزيع فيشر بدرجتي حرية ν_1 ν_2

- $F_p(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F_{1-p}(\nu_2, \nu_1)}$

II.3.8.المميزات العددية لـــــلمتغيرF:

- التوقع الرياضي : $E(x) = \frac{\nu_2}{\nu_2-2}$

- التباين : $\upsilon(x) = \frac{2\nu_2{}^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-4)(\nu_2-2)^2}$ حيث $\nu_2 > 4$

II.4.8.تابع توزيع فيشر :

$$f(x_k) = P(F \leq x_k) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \int_0^{x_k} (\nu_1)^{\frac{\nu_1}{2}}.(\nu_2)^{\frac{\nu_2}{2}}.(x)^{\frac{\nu_1}{2}-1}(\nu_2+\nu_1 x)^2\, dx$$

II.5.8.جدول قانون توزيع فيشر : يعطي هذا الجدول القيم الممكنة للمتغير العشوائي F عند احتمال معين P وبدرجتي حرية ν_1 ν_2 ولهذا نكتب أحيانا كل هذه المعطيات كما يلي : "$F_p(\nu_1, \nu_2)$" أو $F_{p(\nu_1,\nu_2)}$

يمكن أن نجد جدولين حسب قيمة P : أحدهما عند P=95% (أي مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$)

والأخر عند P=95% (أي مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$) .

مثال : أحسب مايلي :

- $F_{0.95}(1,10)$
- $F_{0.95}(6,1)$
- $F_{0.99}(6,10)$
- $F_{0.95}(\infty, \infty)$