Université Mohamed khider Biskra

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de vie
Département de mathématiques
Module: Martingales à temps discret

TD 3: Martingales et temps d'arrêt

Exercice1:

1) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$une suite de v.a.r. indépendantes de même loi donnée par : $P(Z_n = 1) = p$, $P(Z_n = -1) = 1 - p$. On pose $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $B_n = \sigma(Z_1, ..., Z_n)$ pour $n \geq 1$. Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. positives bornées, telles que b_n soit $\mathcal{B}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$, on définit un jeu en décidant que si $Z_n = 1$, on gagne b_n , et si $Z_n = -1$, on pert b_n. Soit S_0 la fortune initiale, S_n la fortune aprés le n-iéme coup.
Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$est une martingale si $p = \frac{1}{2}$, une sous-martingale si $p \succ \frac{1}{2}$, une sur-martingale si $p \prec \frac{1}{2}$.
2)Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sur-martingale pour la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$,
a)Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.positives et bornées, ε_n étant $\mathcal{B}_{n-1}$-mesurable pour $n \geq 1$ et ε_0 constante. On pose $Z_0 = X_0$, et pour $n \geq 1$, $Z_n = X_n - X_{n-1}$.Montrer que la suite $Y_n = \varepsilon_0 Z_0 + ... + \varepsilon_n Z_n$ est une sur-martingale.
b) Soit T un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$. Montrer que le processus $\left(\hat{X}_n\right)_{n\geq 0} = (X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une sur-martingale.

Exercice2:

Soit $(Y_n)_{n\in\in N}$ une suite de v.a.r. indépendantes intégrables, avec $E(Y_n) = \mu_n$. On pose $m_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k$, puis:
$S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \phi\}$, et pour $n \geq 1$, $S_n = Y_1 + ... + Y_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$,
1-Montrer que $Z_n = S_n - m_n$ est une martingale.
2-Si la suite Y_n est de carré sommable, on pose $\sigma_n^2 = var\,(Y_n)$ et $v_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$.
Montrer que $X_n = Z_n^2 - v_n^2$ est une martingale.

Exercice3:

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a indépendantes. Pour $a \succ 0$, on pose:
$Y_n^a = X_n \mathbf{1}_{\{|X_n|\leq a\}}$, $m_n^a = E\left(Y_n^a\right)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} (Y_k^a - m_k^a)$.
On suppose qu'il existe $a \succ 0$ tel que les séries:
$\sum_n P\left(|X_n| \geq a\right);\ \sum_n E\left(Y_n^a\right);\ \sum_n Var\left(Y_n^a\right)$ soient convergentes.
a) Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une martingale, en déduire que $\sum_n (Y_n^a - m_n^a)$ converge presque surement.
b) Montrer que $\sum_n Y_n^a$ converge presque sûrement.

c) Montrer que $\sum\limits_{n} X_n$ converge presque sûrement.

Exercice4:

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une sMG pour la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in N}$ et soit $(m_n)_{n\in N}$ une suite croissante de temps d'arrêt finis. On pose $Y_n = X_{m_n}$. Montrer que les hypothèses

$\forall n \geq 0,\ E(|Y_n|) < +\infty$ et

$\forall n \geq 0,\ \underline{\lim} \int\limits_{\{m_n > N\}} |X_N|\, dp = 0$

sont vérifiées dans les deux cas suivants:

a) Il existe $M > 0$ tel que pour tout n, $|X_n| \leq M \quad P.p.s.$

b)Les temps d'arrêt m_n sont bornés:

$\forall n \geq 0,\ \exists k_n \in N,\ m_n \leq k_n \quad P.p.s.$

Exercice5: (théorème généralisé de Lebegue)

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a intégrable qui converge $P.p.s$ vers X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

1)$X \in L^1$ et $X_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{L^1}{\longrightarrow}} X$

2)La suite $(X_n)_{n\in N}$ est uniformément intégrable.

Exercice6:

Soit H une partie de L^1. les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) H est uniformément intégrable.

2)Il existe une fonction $g : R_+ \longrightarrow R_+$ telle que $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} \frac{g(t)}{t} = +\infty$, et $\sup\limits_{X\in H} E\left[g\left(|X|\right)\right] < +\infty$.