chapitre 05

4.3 Application du théorème des résidus à des calculs d'intégrales

4.3.1 Intégrale du type $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

On suppose que f soit la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction f, qui est analytique dans un ensemble ouvert de la forme $D' = D - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ où D contient le demi plan fermé $\operatorname{Im} z \geq 0$, et les a_k sont des points du demi-plan ouvert $\operatorname{Im} z > 0$.
On considère alors un lacet γ, juxtaposition $\gamma_1 \vee \gamma_2$ de deux chemins suivants :

$$\begin{aligned} &\gamma_1 : t \longrightarrow t, &&\text{pour} \quad -R \leq t \leq R. \\ &\gamma_2 : t \longrightarrow R\,e^{it}, &&\text{pour} \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{aligned}$$

Où le nombre R est pris tel que $R > |a_k|$ pour tous les indices k ; il est immédiat que l'on a pour tout k, $\mathcal{J}(a_k, \gamma) = 1$.
Le théorème des résidus permet d'écrire,

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}es(f, a_k).$$

Si de plus,

$$\lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0,$$

par passage à la limite on a donc :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}es(f, a_k).} \tag{4.5}$$

Premier cas :
$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Aucun des zéros de Q n'étant réel. Supposons en outre que l'on ait,

$$\deg Q \geq 2 + \deg P.$$

La formule (4.5) est valable, les a_k étant les zéros de Q tels que $\operatorname{Im} a_k > 0$.

Exemple 4.3.1 *Calculer l'intégrale :*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Remarquons que $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$. Posons alors,

$$f(z) = \frac{1}{2}\,\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}.$$

Ici on a $P(z) = z^2$ et $Q(z) = 2(z^2+1)(z^2+9)$, et $\deg Q = 4 \geq 2 + \deg P = 2 + 2 = 4$.
les racines de $Q(z)$ sont $i, -i, 3i$ et $-3i$, donc aucune n'est réelle, la formule (4.5) est donc applicable.
Seuls i et $3i$ ont des parties imaginaires strictement positifs, d'où

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i\,(\mathscr{R}es(f,i) + \mathscr{R}es(f,2i))$$

i et $2i$ étant deux pôles simples de f, appliquons la formule (4.3).
Pour le pôle i on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{R}es(f,i) &= \lim_{z\longrightarrow i}(z-i)\frac{z^2}{2(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\longrightarrow i}\frac{z^2}{(2(z^2+1)(z^2+9))'}\\ &= \lim_{z\longrightarrow i}\frac{z^2}{2((2z)(z^2+9)+(z^2+1)(2z))} = \frac{-1}{2(2i)(8)} = \frac{-1}{32i}.\end{aligned}$$

Pour le pôle $3i$ on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{R}es(f,3i) &= \lim_{z\longrightarrow 3i}(z-3i)\frac{z^2}{2(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\longrightarrow 3i}\frac{z^2}{(2(z^2+1)(z^2+9))'}\\ &= \lim_{z\longrightarrow 3i}\frac{z^2}{2((2z)(z^2+9)+(z^2+1)(2z))} = \frac{-9}{2(6i)(-8)} = \frac{3}{32i}.\end{aligned}$$

D'où,

$$I = 2\pi i\left(\frac{-1}{32i} + \frac{3}{32i}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Exemple 4.3.2 *Calculer l'intégrale :*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2ix+2-4i}.$$

Posons $f(z) = \frac{1}{z^2+2iz+2-4i}$. Les pôles de f sont simples et on a $z_1 = 1+i$ et $z_2 = -1-3i$, $\mathscr{I}m(z_2) < 0$, est à rejeter.
Les conditions sont toutes vérifiées, on a alors,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2ix+2-4i} = 2\pi i\mathscr{R}es(f,1+i).$$

$$\mathscr{R}es(f,1+i) = \lim_{z\longrightarrow 1+i}(z-1-i)f(z) = \lim_{z\longrightarrow 1+i}(z-1-i)\frac{1}{z^2+2iz+2-4i} = \lim_{z\longrightarrow 1+i}\frac{1}{2z+2i} = \frac{1}{2+4i}.$$

Finalement,

$$I = 2\pi i\cdot\frac{1}{2+4i} = \frac{2\pi}{5} + i\frac{\pi}{5}.$$

Remarquons que, $f(x) = \frac{1}{x^2+2ix+2-4i} = \frac{(x^2+2)-i(2x-4)}{(x^2+2)^2+(2x-4)^2} = \frac{(x^2+2)-i(4-2x)}{x^4+8x^2-16x+20}$,

d'où l'on déduit,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+2)dx}{x^4+8x^2-16x+20} = \frac{2\pi}{5},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(4-2x)dx}{x^4+8x^2-16x+20} = \frac{\pi}{5}.$$

Deuxième cas :
$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}\, e^{imz}$, $m > 0$; où P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Aucun des zéros de Q n'étant réel. Supposons en outre que l'on ait,

$$\deg Q \geq 1 + \deg P.$$

La formule (4.5) est valable, les a_k étant les zéros de Q tels que $\operatorname{Im} a_k > 0$.

Exemple 4.3.3 *calculer l'intégrale*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

Soit $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2}$, on a deux pôles simples $z_1 = -1 + i$, et $z_2 = -1 - i$ ce dernier est à rejeter.
On a donc $\mathcal{R}es(f, -1 + i) = \lim\limits_{z \longrightarrow -1+i} (z + 1 - i) f(z) = \lim\limits_{z \longrightarrow -1+i} (z + 1 - i) \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2} = \dfrac{e^{-1-i}}{2i}$.
Finalement, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\, dx}{x^2 + 2x + 2} = 2\pi i \frac{e^{-1-i}}{2i} = \pi\, e^{-1-i} = \pi\, e^{-1}(\cos 1 - i \sin 1)$ d'où l'on déduit,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2 + 2x + 2} = -\pi\, e^{-1} \sin 1,$$
$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2 + 2x + 2} = \pi\, e^{-1} \cos 1.$$

4.3.2 Intégrale du type $I = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$

Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle en x et en y qui n'a pas de pôles sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$, alors on a :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} \tag{4.6}$$

L'égalité (4.6) est justifiée par le changement de variables suivant :
$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \Longrightarrow z^{-1} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$
d'où l'on tire
$\cos\theta = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$, $\quad \sin\theta = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$ et $dz = i e^{i\theta}\, d\theta \Longleftrightarrow d\theta = \dfrac{dz}{iz}$.
Posons : $f(z) = \dfrac{1}{iz} \cdot R\left(\dfrac{z + z^{-1}}{2}, \dfrac{z - z^{-1}}{2i}\right)$, on a alors :

$$\boxed{I = 2\pi i \sum \mathcal{R}es\,(f(z), z_k)\,,}$$

où la somme est étendue à tous les pôles de $f(z)$ tels que $|z_k| < 1$.