UNIVERSITE DE BISKRA
$2^{ème}$ ANNEE Physique

Fonction de La Variable Complexe

SERIE 4

EXERCICE 1/ Calculer les résidus des fonctions suivantes :

1) $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z(z^2+1)^2}$

2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$

3) $f(z) = \dfrac{1}{z^2\cos(z-1)}$

EXERCICE 2/ Calculer les intégrales suivantes (en utilisant le théorème des résidus) :

1) $\oint_{|z|=3} \dfrac{e^{iz}}{z^2(z^2+2z+2)}dz$

2) $\oint_{|z|=4} \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz$

3) $\oint_C \dfrac{chz}{z^3}dz$, où C est le carré de sommets $2+2i, 2-2i, -2-2i, -2+2i$.

EXERCICE 3/ Evaluer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{2\pi} \dfrac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$

2) $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^6+1}$

alors $\int_0 \frac{}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$ $\int_C$ $\left(\frac{}{2}\right)$

où C est le cercle de centre 1 et rayon 0

• Les pôles de $\frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}$ sont les pôles simples :

$z_1 = 2-i$, $z_2 = \frac{2-i}{5}$, seul $\frac{2-i}{5}$ est à l'intérieur de C

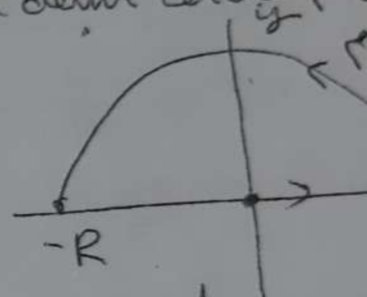
• $Res\left(f, \frac{2-i}{5}\right) = \lim_{z\to\frac{2-i}{5}} \left(\frac{-2+i}{5}+z\right)\frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i} = \lim_{z\to\frac{2-i}{5}} \frac{2}{2(1-2i)z+6i}$

d'où $\oint_C \frac{2\,dz}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i} = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i} = \pi = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$

(II) Evaluer $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^6+1}$, on considère $\oint_C \frac{dz}{z^6+1}$, où C designe

contour fermé, formé du segment -R, +R et du demi cercle Γ

dans le sens direct.



Puisque $z^6+1=0 \Rightarrow z^6=-1=\cos\frac{\pi}{\cancel{2}}+i\sin\frac{\pi}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow z_0 = e^{i\pi/6},\ z_1 = e^{3\pi i/6},\ z_2 = e^{5\pi i/6},\ z_3 = e^{7\pi i/6},\ z_4 = e^{9\pi i/6}$

$z_5 = e^{\frac{11\pi i}{6}}$ sont les pôles simples de $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$.

es pôles z_0, z_1, z_2 sont à l'intérieur de C d'où en uti

a règle de l'Hopital :

$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-e^{i\pi/6})\frac{1}{z^6+1} = \frac{1}{6}e$

$Res(f, z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \frac{1}{6}e^{-\frac{5\pi i}{2}}$

$Res(f, z_2) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z) = \frac{1}{6}e^{-\frac{25\pi i}{6}}$

$\oint \frac{dz}{} = 2\pi i\left(Res(f, z_0) + Res(f, z_1) + Res(f, z_2)\right) = \frac{2\pi}{2} =$