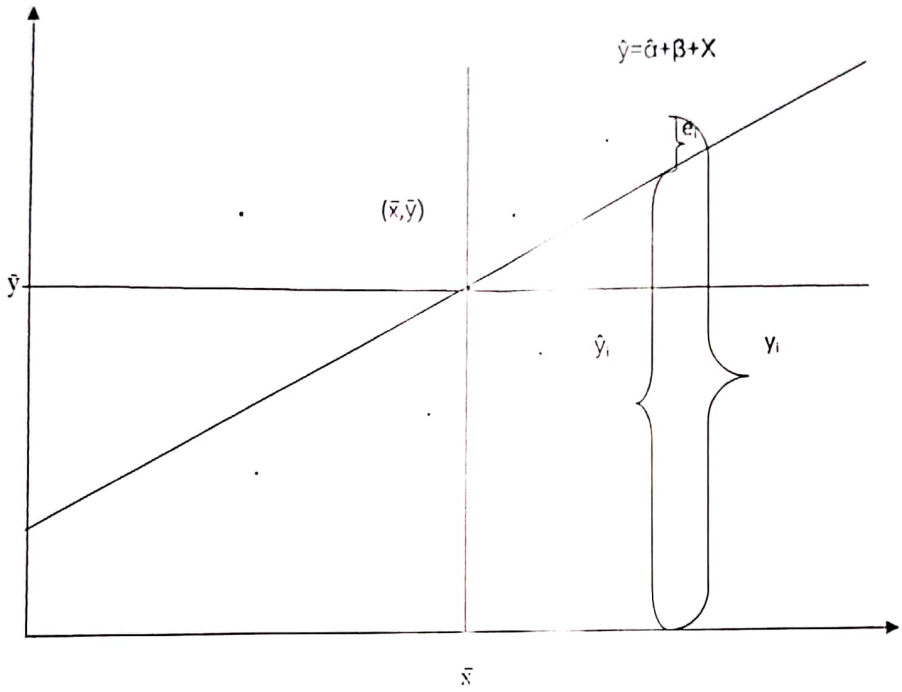
المحاضرة الثانية

تقدير الخط المستقيم باستخدام المربعات الصغرى
(التوفيق بواسطة المربعات الصغرى)

$$=E(u_i)^2 = \sigma^2_u$$

$$y \sim N_i(\alpha+\beta x_i, \sigma_u)^2$$

التوفيق بواسطة المربعات الصغرى:



$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

$$e^2_i = (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$\Sigma e^2_i = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma(y_i - \hat{\alpha} - \beta x_i)^2$$

$$\Sigma e^2_i = f(\hat{\alpha}, \beta)$$

$$\frac{\Sigma e^2 i}{\partial \beta} = -2\Sigma(y_i - \hat{\alpha} - \beta x_i) = 0$$

$$\Sigma y_i = n\hat{\alpha} + \beta \Sigma x_i \text{----------(1)}$$

$$\frac{\partial \Sigma e_i^2}{\partial \beta} = -2\ \Sigma x_i(y_i - \hat{\alpha} - \beta x_i) = 0$$

$$\Sigma x_i y_i = \hat{\alpha}\Sigma x_i + \beta \Sigma x_i^2 \text{----------(2)}$$

من (1) و (2) نجد:-

$$\beta = \frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x)^2}$$

و لايجاد $\hat{\alpha}$: بتقسيم طرفي العلاقة (1) على n نجد:-

$$\bar{Y} = \hat{\alpha} + \beta \bar{x}$$

و هذا يعني ان الخط المستقيم المقدر لابد ان يمر عبر نقطة الوسطين الحسابيين.

الطريقة الثانية لايجاد β:

لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} \hat{y} = \hat{\alpha} + \beta x_i \\ \\ \bar{y} = \hat{\alpha} + \beta \bar{x} \end{array}\right\} \quad \hat{y}_i - \bar{y} = \beta(x_i - \bar{x})$$

و منه:

$$\hat{y}_i = \beta x_i$$

حيث:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \bar{y} + \bar{y} - \hat{y}$$

$$= (y_i - \bar{y}) - (\hat{y} - \bar{y})$$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

$e_i=y_i-\beta x_i$

و منه:

$\Sigma e^2_i= \Sigma(y_i- \beta x_i)^2$

نشتق بالنسبة لـ β:

$$\frac{\partial \Sigma e_i^2}{\partial \beta} = -2 \Sigma x_i(y_i- \beta x_i) = 0$$

$$\Sigma x_i y_i=\beta \Sigma x_i^2 \Rightarrow \beta=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x_i^2}$$

$e^2_i=(y_i- \beta x_i)^2$

$\Sigma e^2_i= \Sigma(y_i- \beta x_i)^2$

$$\Sigma e^2_i=f(\beta)$$

$$\frac{\partial \Sigma e_i^2}{\partial \beta} = -2 \Sigma x_i(y_i- \beta x_i) = 0$$

$\Sigma x_i y_i=\beta \Sigma x_i^2$

$$\beta=\frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2}$$

بالنسبة لـ $\hat{\alpha}$ يتم الحصول عليها من:

$\bar{y}=\hat{\alpha}+\beta\bar{x} \Rightarrow \hat{\alpha}=\bar{y}-\beta\bar{x}$

مثال: الجدول التالي يبين حوادث المرور و السيارات المرخصة في المملكة المتحدة خلال 10 سنوات.

السنة	حوادث المرور بالالاف y	السيارات المرخصة بعشرات الالاف x	$Y=y-\bar{y}$	$\chi=x-\bar{x}$ $\varkappa y\varkappa^2$
1947	166	352	-51.8	
48	153	373	-64	
49	177	411		
50	201	441		
51	216	462		
52	208	490		
53	227	529		
54	238	577		
55	268	641		
56	268	692		
57	274	743		
Σ	2396	5711		52876 169495

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x_i}{11}=\frac{5711}{11}=519,2$$

$$\bar{y}=\frac{\Sigma y}{11}=\frac{2396}{11}=217,82$$

و لدينا:

$$\Sigma x^2 = 3134543$$

$$\Sigma xy = 1296836 \qquad n=11$$

$$\beta=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}=\frac{52876}{169495}=0,312$$

$$\hat{\alpha}=\bar{Y}-\beta\bar{x}=217,82-(0,312)(519,2)$$

$$=55,85$$