المحاضرة الثالثة

خصائص مقدرات المربعات الصغرى

$\hat{y}=55,85+0,312x$

خصائص المقدرات بواسطة المربعات الصغرى: ندرس خصائص المقدرات ضمن شروط ان x_i معطاة اي ان x_i ثابتة ضمن عدد من العينات مع العلم ان y_i تتغير من عينة لاخرى حسب u_i.

لنفرض لدينا مجموعة من العينات عددها m من القيم x_i و y_i.

(1)

x_i	y_i	
x_1	y_1	$\hat{\alpha}$
x_2	y_2	
⋮	⋮	β
x_n	y_n	

(2)

x_i	y_i	
x_1	y_1	$\hat{\alpha}$
x_2	y_2	
⋮	⋮	β
x_n	y_n	

(m)

x_i	y_i	
x_1	y_1	$\hat{\alpha}$
x_2	y_2	
⋮	⋮	β
x_n	y_n	

و الملاحظة ان الزوج $(\hat{\alpha},\beta)$ و الممكن تقديره من واقع مشاهدات العينة الاولى و كذلك من واقع مشاهدات العينة الثانية باعتماد طريقة المربعات الصغرى فان الزوجين يختلفان طبقا لتغير قيم y_i في كلتا العينتين.

و بذلك تتولد لدينا سلسلة من قيم $\hat{\alpha}$ و β عندما انتقل من عينة لاخرى و بذلك يمكن ان يتصور ان β و $\hat{\alpha}$ متحولان عشوائيان لهما قانون احتمالي معين ذلك لان β و $\hat{\alpha}$ يتاثران بتغيرات y_i و y_i تابع لتغير المتحول العشوائي u_i.

ملاحظة: ان تقديرات المربعات الصغرى هي توابع خطية للمشاهدات الفعلية حول قيم y_i اثبات هذه الملاحظة:

$$\beta=\frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2}=\frac{\Sigma x_i(y-\bar{y})}{\Sigma x_i^2}=\frac{\Sigma x_i y_i-\bar{y}\Sigma x_i}{\Sigma x_i^2}$$

$$\beta=\frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2}$$

نفرض ان:

$$\frac{x_i}{\Sigma x_i^2} = w_i$$

حيث :

$$\beta=\Sigma w_i y_i$$

لان: $x_2 \Rightarrow \chi_i = x_i-\bar{x}$

و منه: $\frac{x_i}{\Sigma x_i^2}$ ثابت

اذن العلاقة خطية بين β و y_i

$$\beta=\Sigma w_i y_i$$

و نريد ان نبين ان العلاقة خطية بين β و y_i اي $\hat{\alpha}=\Sigma d_i y_i$

لدينا $\hat{\alpha}=\bar{y}-\beta\bar{x}$

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{N}\Sigma y_i-\Sigma w_i y_i \bar{x}$$

$$=\Sigma\frac{y_i}{N}-\Sigma\bar{x}w_i y_i$$

$$=\Sigma(\frac{1}{N}-\bar{x}w_i)\, y_i$$

و اذا رمزنا $\hat{\alpha}=\Sigma\,\frac{1}{N}-\bar{x}w_i$

$$\hat{\alpha}=\Sigma d_i y_i$$

لدراسة خصائص المتدرات $\hat{\alpha}$ و β يجب ان ندرس تحيزهما و انهما اقل تباين اي ان مقدرات المربعات الصغرى هي مقدرات غير متحيزة و ذات اقل تباين.

$$\beta=\Sigma\, w_i y_i$$

$= \Sigma w_i(\alpha+\beta x_i+u_i)$

$=\alpha\Sigma w_i+\beta\Sigma w_i x_i+\Sigma w_i u_i$

$\beta= \beta+ \Sigma w_i u_i$

و منه: $= (\beta) = E(B)+\Sigma w_i E(u_i)$

و بذلك فان β هو تقدير غير متحيز لـ β $\quad E(\beta)=\beta$

$w_i=\frac{x_i}{\Sigma x_i^2} \Rightarrow \Sigma w_i = \frac{\Sigma x_i}{\Sigma x_i^2} =0$

$\Sigma w_i x_i=\Sigma(x_i\bar{x})w_i=\Sigma w_i x_i-\bar{x}\Sigma w_i$

$\Sigma w_i \chi_i= \Sigma w_i x_i$

كان: $w_i=\frac{x_i}{\Sigma x_i^2}$

$\chi_i w_i=\frac{x_i}{\Sigma x_i^2}$

$\Sigma\chi_i w_i= \frac{\Sigma x_i^2}{\Sigma x_i^2} =1$

و منه: $\Sigma w_i \chi_i= \Sigma w_i x_i=1$

اثبات ان $\hat{\alpha}$ هو تقدير غير متحيز لـ α

لدينا:

$\hat{\alpha}=\Sigma(\frac{1}{N} -\bar{x}w_i)y_i$

$= \Sigma(\frac{1}{N} -\bar{x}w_i) (\alpha+\beta x_i+u_i)$

$=\Sigma(\frac{\alpha}{N}+\frac{\beta}{N}x_i + \frac{u_i}{N} - \alpha\bar{x}w_i - \beta\bar{x}w_i x_i - \bar{x}w_i u_i$

$$=\frac{\cancel{N}\alpha}{\cancel{N}}+\beta\frac{\Sigma X_I}{N}-\alpha\bar{x}\Sigma w_i-\beta\bar{x}\Sigma x_i w_i+\Sigma\left(\frac{1}{N}-\bar{x}w_i\right)u$$

$$=\alpha+\cancel{\beta\bar{x}}-\alpha\bar{x}\Sigma w_i-\cancel{\beta\bar{x}}\Sigma x_i w_i+\Sigma\left(\frac{1}{N}-\bar{x}w_i\right)u_i$$

$$\hat{\alpha}=\alpha+\Sigma\underbrace{\left(\frac{1}{N}-\bar{x}w_i\right)}_{d_i}u_i=\alpha+\Sigma d_i u_i$$

$$=\alpha+\frac{\Sigma ui}{N}-\bar{x}\Sigma w_i u_i$$

$$E(\hat{\alpha})=E(\alpha)-E(\frac{\Sigma u_i}{n}-\bar{x}\Sigma w_i E(u_i)$$

$$E(\hat{\alpha})=E(\alpha)+\Sigma d_i E(u_i)$$

ثابت

$$E(\hat{\alpha})=\alpha$$

تباينات التقديرات:

لحساب التباينات لكل من β و α نعلم ان كل من α̂ وβ تقدير خطي اي مرتبط في علاقة خطية مع x كذلك فان كل α̂ و β يرتبطان في علاقة خطية مع حد الاضطراب **u** حيث:

$$\beta=\beta+\Sigma w_i u_i$$

$$\hat{\alpha}=\alpha+\Sigma d_i u_i$$

تباين β: لدينا:-

$$\beta=\beta+\Sigma w_i u_i$$

و منه:-

$$\beta-\beta=\Sigma w_i u_i$$

$$(\beta-\beta)^2=(\Sigma w_i u_i)^2$$

$$Var(\beta)=E(\beta-\beta)^2=E[(\Sigma w_i u_i)^2]$$

لدينا:-

$$(\Sigma w_i u_i)^2=(w_1u_1+w_2u_2+\text{---------}+w_nu_n)^2$$

$$= w_1^2u_1^2+w_2^2u_2^2+\text{----}+w_n^2u_n^2 2w_1w_2u_1u_2+\text{--}+2w_{n-1}w_n+u_{n-1}u_n$$

$$E(\Sigma w_i u_i)^2=w_1^2E(u_1^2)+w_1^2E(u_2^2)+\text{---}+w_n^2E(u_n^2)+0+\text{---}0$$

لكن:-

$$Cov(u_iu_j)=0 \qquad i\neq j$$

$$=w_i^2\delta_u^2+\text{--------------}w_n^2\delta_u^2$$

$$Var(\beta)=\delta_u^2\sum_{i=1}^{n}w_i^2$$

و منه لدينا:-

$$W_i=\frac{x_i}{\Sigma x_i^2}$$

$$W_i^2=\frac{x_i^2}{(x_i^2)^2}$$

$$\Sigma W_i^2=\frac{\cancel{\Sigma x_i^2}}{(\cancel{\Sigma x_i^2})^2}$$

$$\Sigma W_i^2=\frac{1}{\Sigma x_i^2}$$

$$Var(\beta)=\frac{\delta u^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

بما ان تباين حد $\varkappa^2$ الاضطراب مجهول اذن تباين β مجهول و الاول يتم تقديره و بالتالي يتم تقدير تباين β.

تباين $\hat{\alpha}$:

لدينا:-

$$E(\hat{\alpha})=\alpha$$

و منه:-

$$Var(\hat{\alpha})=E[(\hat{\alpha}-\alpha)^2]$$

لكن لدينا:-

$$\hat{\alpha}=\bar{Y}-\beta\bar{x}$$

$$\hat{\alpha}=\alpha+\beta\bar{x}+\bar{u}-\beta\bar{x}$$

$$\hat{\alpha}-\alpha=\beta\bar{x}+\bar{u}-\beta\bar{x}$$

$$=-(\beta-\beta)\bar{x}+\bar{u}$$

$$\hat{\alpha}-\alpha=\bar{u}-(\beta-\beta)\bar{x}$$

$$(\hat{\alpha}-\alpha)^2=\bar{u}^2(\beta-\beta)^2\bar{x}^2-2\bar{x}(\beta-\beta)\bar{u}$$

$$E(\hat{\alpha}-\alpha)^2=E(\bar{u}^2)+\bar{x}^2E^2(\beta-\beta)^2-2\bar{x}E\{(\beta-\beta)\bar{u}\}$$

$$=\frac{\delta u^2}{n}+\bar{x}^2\frac{\delta u^2}{\Sigma x^2}$$

$$=\delta u^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\Sigma x_i^2}\right)$$

لان:-

$$E\{(\beta-\beta)\bar{u}\}=E\{(\Sigma w_i u_i)(\frac{1}{n}\Sigma u_i)\}=0$$

لدينا:-

β-β=$\Sigma w_i u_i$

و منه و بالتعويض

$E[(\beta-\beta)\bar{u}]=E[\Sigma w_i u_i \bar{u}]$

$E[\Sigma w_i u_i \frac{\Sigma u_i}{n}]=\frac{1}{n}E[\Sigma w_i u_i \Sigma u_i]$

$\frac{1}{n}E[(w_1u_1+w_2u_2+\text{---------}+w_nu_n)(u_1+u_2+\text{-----}u_n)$

$\frac{1}{n}E[(w_1u_1^2+w_2u_2u_1+\text{-----}w_nu_nu_1)+(u_2w_1u_1+w_2u_2^2\text{---}$

$+w_nu_nu_2)+(u_nw_1u_1+w_2u_2u_n+\text{------}w_nu_n^2)$

$\frac{1}{n}[w_1E(u_1^2)+\text{-----}w_2E(u_2^2)+\text{------}w_nE(u_n^2)]$

$\frac{1}{n}\ \delta_n^2\Sigma w_i=\frac{\delta_u^2}{n}.0=0$

$=E\{\frac{1}{n}[\Sigma w_i u_i^2+\sum_{i\neq j}(w_i+w_j)u_iu_j]\}???$

$=0$

التباين المشترك لـ $\hat{\alpha}$ و β:-

$Cov(\hat{\alpha},\beta)=E[(\hat{\alpha}-\alpha)(\beta-\beta)]$

لدينا:-

$\hat{\alpha}-\alpha=-(\beta-\beta)\bar{x}+\bar{u}$

$=E\{[\bar{u}-(\beta-\beta)\bar{x}](\beta-\beta)\}$

$=E\{(\beta-\beta)\bar{u}\}-\bar{x}E(\beta-\beta)^2$

لدينا سابقا:-

$$E[(\beta-\beta)\bar{u}]=E[\Sigma w_i u_i \bar{u}]$$

و منه:-

$$Cov(\hat{\alpha},\beta)=-\bar{x}\frac{\delta_u^2}{\Sigma x_i^2}$$

سوف نبين ان تباين β 'var(β)' هو اصغر تباين:-

اذا افترضنا ان: $\beta=\Sigma c_i y_i$ هو تقدير خطي لـ β بالتعريف.

حيث:- $c_i(i=1,2,\text{-------}n)$

تمثل معاملات تتقبل

$$\beta=\alpha\Sigma c_i+\beta\Sigma c_i x_i+\Sigma c_i u_i$$

و منه لكي يكون β مقدر غير متحيز فان المعامل c_i لابد ان يملا الشروط التالية:-

$$\Sigma c_i=0 \qquad \Sigma c_i x_i=1$$

$$\beta=\beta+\Sigma c_i u_i$$

و منه:-

$$E(\beta)=0+\beta+E[\Sigma c_i u_i]$$

$$E(\beta)=\beta$$

تبعا لذلك فان تباين β.

$$Var(\beta)=\delta_u^2\Sigma c_i^2$$

و لمقارنة هذا التباين مع تباين المربعات الصغرى(β)Var.

نفرض: $c_i=w_i+(c_i-w_i)$

$$\Sigma c_i^2=\Sigma w_i^2+[(c_i-w_i)^2+2\underbrace{\Sigma w_i(c_i-w_i)}_{}\nearrow 0$$

لان:- $\Sigma w_i c_i=\frac{\Sigma c_i x_i}{\Sigma x_i^2}$

بما ان: $\Sigma c_i x_i=1$

$$\Sigma w_i c_i=\frac{1}{\Sigma x_i^2}$$

و لدينا: $\Sigma w_i^2=\frac{1}{\Sigma x_i^2}$

و منه:- $\Sigma w_i(c_i-w_i)=0$

لان:- $\Sigma w_i(c_i-w_i)= \Sigma w_i c_i- \Sigma w_i^2=0$

و منه:-

$$\Sigma c_i^2=\Sigma w_i^2+\Sigma(c_i-w_i)^2$$

و بضرب طرفي العلاقة بـ δ_U^2:-

$$\delta_U^2\ \Sigma c_i^2= \delta_U^2\ \Sigma w_i^2+ \delta_U^2\ \Sigma(c_i-w_i)^2$$

و منه:-

$$Var(\beta)=var(\beta)+\delta_u^2\Sigma(c_i-w_i\grave{a}^2$$

وبما ان:- $\Sigma(c_i-w_i)^2>0$

الا اذا كان $c_i=w_i$ مهما كانت قيمة i و منه:-

$$Var(\beta)<var(\beta)$$

و منه فان تباين مقدر المربعات الصغرى اقل من المقدر الخطي: و بالتالي فان مقدر المربعات الصغرى يعد من المقدرات الخطية غير المتحيزة ذات اقل تباين و بالتالي فان β هو افضل تقدير خطي غير متحيز.

تنبيه: بما ان $\hat{\alpha}$ و β هي توابع خطية لـ u و بما ان u متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيق اذن:-

$$\hat{\alpha} \sim N[\alpha, \delta_u^2(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\Sigma x^2})]$$

$$\beta \sim N(\beta, \frac{\delta_u^2}{\Sigma x_i^2})$$

$$y_1 \sim N(\alpha+\beta x_i, \delta_u^2)$$

تقدير تباين u المجهول: نحن نعلم ان افضل تقدير هو الغير متحيز. و الان نبرهن ان تقدير تباين u δ_u^2 غير المتحيز:-

$$\delta_u^2 = E(\frac{\Sigma e_i^2}{n-2})$$

هو $s^2 = \frac{\Sigma e_i^2}{n-2}$

لدينا:- $e_i = y_i - \hat{y}_i$

$$e_i = \alpha+\beta x_i+u_i-\hat{\alpha}-\beta x_i$$

$$= u_i-(\hat{\alpha}-\alpha)-(\beta-\beta)x_i$$

لكن لدينا سابقا من $(\hat{\alpha}=\bar{y}-\beta\bar{x})$

$$\hat{\alpha}-\alpha = \bar{u}-(\beta-\beta)\bar{x}$$

و منه: $e_i = u_i - \bar{u}-(\beta-\beta)\bar{x}$

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma(u_i-\bar{u})^2+(\beta-\beta)^2\Sigma x_i^2-2(\beta-\beta)\Sigma(u_i-\bar{u})x_i$$

و منه:

$$E(\Sigma e_i^2)=E[\Sigma(u_i-\bar{u})^2]+E[(\beta-\beta)^2\Sigma x_i^2]-2E[(\beta-\beta)\Sigma x_i(u_i-\bar{u})]$$

1/ $E[(\beta-\beta)^2 \Sigma x_i^2]$

$$Var(\beta)=E(\beta-\beta)^2=\frac{\delta u^2}{\Sigma x_i^2}=>E[(\beta-\beta)^2\Sigma x_i^2]=\delta_u^2$$

ثابت

2/ $E[\Sigma(u_i-\bar{u})^2]=E[\Sigma(u_i^2-2\bar{u}u_i+\bar{u}^2)]$

$$=E[\Sigma u_i^2-2\frac{\Sigma u}{n}\Sigma u+\frac{1}{n}(\Sigma u)^2]$$

$$=E[\Sigma u^2-\frac{2}{n}(\Sigma u)^2+\frac{1}{n}(\Sigma u)^2]$$

$$=E[\Sigma u^2-\frac{1}{n}(\Sigma u)^2]$$

$$=E[(\Sigma u^2)-\frac{1}{n}E(u)^2]$$

$$=n\,\delta_u^2-\frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\,\delta_u^2$$

$$=n\,\delta_u^2-\delta_u^2=\delta_u^2(n-1)$$

3/ $E[(\beta-\beta)\Sigma x_i(u_i-\bar{u})$

لدينا:

$$\beta=\beta+\Sigma w_i u_i$$

$$\beta-\beta=\Sigma w_i u_i \qquad w_i=\frac{x_i}{\Sigma x_i^2}$$

$$\beta-\beta=\frac{\Sigma x_i u_i}{\Sigma x_i^2}$$

و منه:

$$E(\beta\text{-}\beta)\Sigma x_i(u_i\text{-}\ \bar{u})=E[\frac{\Sigma x_i u_i}{\Sigma x_i^2}\Sigma x_i(u_i\text{-}\ \bar{u})]$$

$$=E[\frac{\Sigma x_i u_i}{\Sigma x_i^2}(\Sigma x_i u_i\text{-}\underbrace{\bar{u}\Sigma x_i}_{0})]$$

$$=E[\frac{\Sigma x_i u_i}{\Sigma x_i^2}\ \Sigma x_i u_i]$$

$$=E[\frac{(\Sigma x_i u_i)^2}{\Sigma x_i^2}$$

$$E[(\Sigma x_i u_i)^2=E(x_i u_i+x_2 u_2+\text{-------}+x_u u_u)^2$$

$$=E(x_1^2 u_1^2+x_2^2 u_2^2+\text{------}+x_u^2 u_u^2)$$

$$=x_1^2\delta_u^2+x_2^2\delta_u^2+\text{------}+x_u^2\delta_u^2$$

$$=\delta_u^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

و منه:

$$E[\frac{(\Sigma x_i u_i)^2}{\Sigma x_i^2}]=\frac{\delta_u^2\Sigma x_i^2}{\Sigma x_i^2}=\delta_u^2$$

و منه:

$$-2E[(\beta\text{-}\beta)\Sigma x_i(u_i\text{-}\ \bar{u})]=-2\delta_u^2$$

و منه:

$$E(\Sigma e_i^2)=\delta_u^2+(n-1)\delta_u^2-2\delta_u^2$$

$$E(\Sigma e_i^2)=(n-2)\delta_u^2$$