Université Mohamed Khider, Biskra 2019/2020
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Master 1: **M1.4 (Modèle linéaire)**

Solution de l'exercice 4 de la Série N°2 : ACP

Exercice 1 *Une étude gastronomique a conduit à apprécier le service, la qualité et le prix de quatre restaurants. Pour cela, un expert à note ces restaurants avec des notes allant de* -3 *à* 3. *Les résultats sont les suivants:*

Restaurant	***Service***	***Qualité***	***Prix***
$\mathbf{R}_1$	-2	$+3$	-1
$\mathbf{R}_2$	-1	$+1$	0
$\mathbf{R}_3$	$+2$	-1	-1
$\mathbf{R}_4$	$+1$	-3	2

La matrice de variances-covariances est

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 5/2 & -3 & 1/2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix},$$

et celle de corrélations (aux erreurs arrondies près) est

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -0.85 & 0.26 \\ -0.85 & 1 & -0,73 \\ 0.26 & -0.73 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Etude de valeurs propres:*
i) Vérifier que $\mathbf{V}$ *admet une valeur propre* $\lambda_3 = 0$.
ii) On donne $\lambda_1 = 30.5/4$. *Déduire la valeur de* λ_2.
iii) Calculer les pourcentages d'inerties. Quelle est la dimension à retenir?
2. *Les vecteurs propres associés à* λ_1 *et* λ_2, *aux erreurs arrondies près, sont*

$$\mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.11 \\ -0.75 \end{pmatrix}.$$

i) Déterminer les composantes principales qui correspondent aux axes principaux associés à $\mathbf{u}_1^*$ *et* $\mathbf{u}_2^*$ *respectivement.*
ii) Représenter les individus dans le plan principal $(1,2)$.
3. *Représentation des variables:*
i) Déterminer les corrélations entre les variables originelles et les composantes principales.
ii) Représenter les variables sur le cercle des corrélations dans le plan factoriel $(1,2)$.
iii) Interpréter les résultats.

* *

Solution

Question 1:

i) On sait que: λ une v.a propre $\Longleftrightarrow \det(\mathbf{V}-\lambda\mathbf{Id}_3)=0$. Donc pour vérifier que $\lambda=0$ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{V}$, il suffit s'assurer que $\det\mathbf{V}=0$. En effet

$$\det\mathbf{V}=\begin{vmatrix} 5/2 & -3 & 1/2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{vmatrix}=0.$$

ii) On donne $\lambda_1=30.5/4=7.625$, avec $\lambda_3=0$. Nous avons

$$\text{Trace}\,(\mathbf{V})=5/2+5+3/2. \tag{1}$$

D'autre part la trace d'une matrice carée égale à la somme de ses valeurs propres. Donc

$$\text{Trace}\,(\mathbf{V})=0.5/4+\lambda_2+0. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) ensembles, impliquent que $\lambda_2=1.375$.

iii) Calcul des pourcentages d'inerties (PI):

$$\text{PI de chaque exe principal}=\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\times 100,\ i=1,2,3.$$

Premier axe principal E_1 :

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\times 100 &= \frac{7.625}{7.625+1.375+0}\times 100 \\ &= 84.722\%.\end{aligned}$$

Deuxième axe principal E_2 :

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\times 100 &= \frac{1.375}{7.625+1.375+0}\times 100 \\ &= 15.278\%.\end{aligned}$$

Troisième axe principal E_3 :

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\times 100 &= \frac{0}{7.625+1.375+0}\times 100 \\ &= 0\%.\end{aligned}$$

Dimension à retenir:

$$\begin{aligned}\text{PI}\,(E_1\times E_2) &= \text{PI}\,(E_1)+\text{PI}\,(E_2) \\ &= 84.722+15.278=100\%.\end{aligned}$$

La dimension à retenir est (1×2), c'est le plan $E_1\times E_2$, car ce dernier a un le plus grand poucentage d'inertie.

Question 2: la matrice des données est

$$\mathbf{X}^*=\begin{pmatrix} -2 & +3 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \\ +2 & -1 & -1 \\ +1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le centre de gravité:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{i1} \\ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{i2} \\ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice centrée des donnees:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* - \mathbf{1}_3 \mathbf{g}^t = \mathbf{X}^*.$$

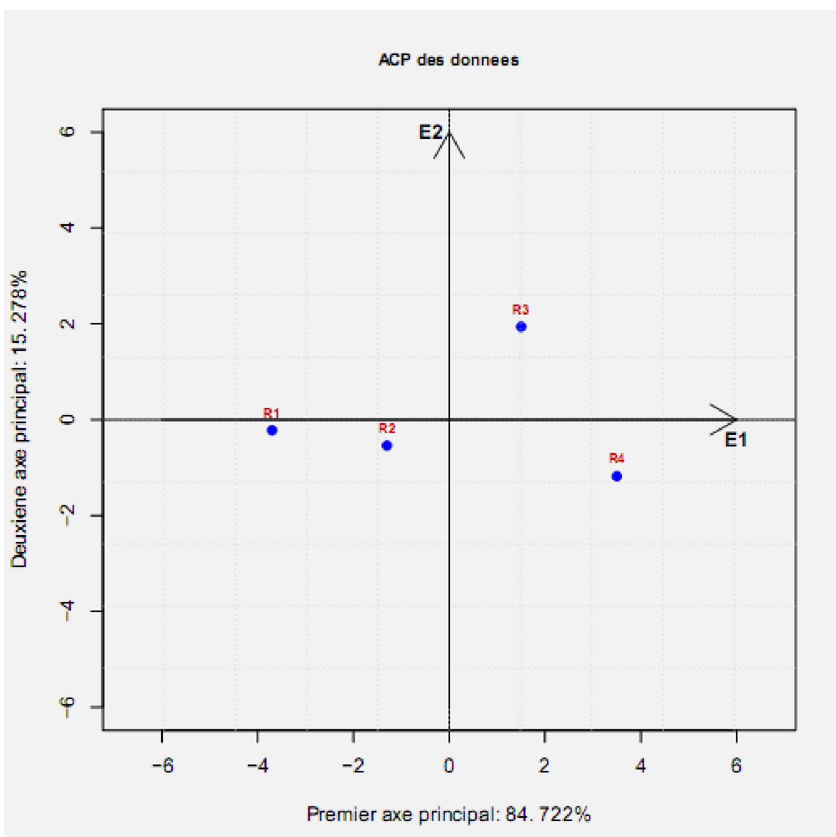
i) Composantes principales:

$$c_1 = \mathbf{X}\mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} -2 & +3 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \\ +2 & -1 & -1 \\ +1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.7 \\ -1.3 \\ 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix},$$

et

$$c_2 = \mathbf{X}\mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} -2 & +3 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \\ +2 & -1 & -1 \\ +1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.11 \\ -0.75 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} -0.22 \\ -0.54 \\ 1.94 \\ -1.18 \end{pmatrix}.$$

ii) Représentation dans le plan $E_1 \times E_2$:



3. **Question 3:** On note.

$$v_1 := \text{Service},\ v_2 := \text{qualité},\ v_3 := \text{prix}.$$

i) Corrélations:

$$\begin{aligned}
\mathbf{cor}\left(v_1, c_1\right) &= \frac{\mathbf{cov}\left(v_1, c_1\right)}{\sqrt{\mathbf{var}\left(v_1\right)}\sqrt{\mathbf{var}\left(c_1\right)}} = \frac{\frac{1}{4}v_1^t c_1}{\sqrt{\frac{1}{4}v_1^t v_1}\sqrt{\frac{1}{4}c_1^t c_1}} \\
&= \frac{v_1^t c_1}{\sqrt{v_1^t v_1}\sqrt{c_1^t c_1}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3.7 \\ -1.3 \\ 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}}\sqrt{\begin{pmatrix} -3.7 \\ -1.3 \\ 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3.7 \\ -1.3 \\ 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}}} \\
&= \frac{15.2}{\sqrt{10}\sqrt{29.88}} = 0.879\,33,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{cor}\left(v_1, c_2\right) &= \frac{\mathbf{cov}\left(v_1, c_2\right)}{\sqrt{\mathbf{var}\left(v_1\right)}\sqrt{var\left(c_2\right)}} = \frac{\frac{1}{4}v_1^t c_2}{\sqrt{\frac{1}{4}v_1^t v_1}\sqrt{\frac{1}{4}c_2^t c_2}} \\
&= \frac{v_1^t c_2}{\sqrt{v_1^t v_1}\sqrt{c_2^t c_2}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -0.22 \\ -0.54 \\ 1.94 \\ -1.18 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}}\sqrt{\begin{pmatrix} -0.22 \\ -0.54 \\ 1.94 \\ -1.18 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -0.22 \\ -0.54 \\ 1.94 \\ -1.18 \end{pmatrix}}} \\
&= \frac{3.68}{\sqrt{10}\sqrt{5.496}} = 0.496\,39.
\end{aligned}$$

****

En utlisant la fonction "correlation" du workplace:

$$\mathbf{cor}\left(v_2, c_1\right) = \begin{bmatrix} +3 & -3.7 \\ +1 & -1.3 \\ -1 & 1.5 \\ -3 & 3.5 \end{bmatrix} = -0.998\,12$$

$$\mathbf{cor}\,(v_2, c_2) = \begin{bmatrix} +3 & -0.22 \\ +1 & -0.54 \\ -1 & 1.94 \\ -3 & -1.18 \end{bmatrix} = 3.8152 \times 10^{-2}$$

****

$$\mathbf{cor}\,(v_3, c_1) = \begin{bmatrix} -1 & -3.7 \\ 0 & -1.3 \\ -1 & 1.5 \\ 2 & 3.5 \end{bmatrix} = 0.6871,$$

et

$$\mathbf{cor}\,(v_3, c_2) = \begin{bmatrix} -1 & -0.22 \\ 0 & -0.54 \\ -1 & 1.94 \\ 2 & -1.18 \end{bmatrix} = -0.71050$$

****

Résumé des corrélations:

	c_1	c_2
v_1	0.87933	0.49639
v_2	-0.99812	3.8152×10^{-2}
v_3	0.6871	-0.71050

Cercle de corrélations: