فصل II

بنية الفضاء الشعاعي

II الفضاءات الشعاعية:

تعريف 1: ليكن $(K, +, \cdot)$ حقل تبديلي.
مجموعة E، المزودة بالعملية الداخلية $\oplus$ والعملية الخارجية $\odot$ مع K
تسمى فضاء شعاعي على K إذا تحقق:

1) $(E, \oplus)$ زمرة تبديلية.

2) العملية الخارجية تحقق:

a) $\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot x \oplus \lambda \odot y$ ، $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \forall y \in E$

b) $(\lambda \oplus \mu) \odot x = \lambda \odot x \oplus \mu \odot x$ ، $\lambda, \mu \in K, \forall x \in E$

c) $\lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda \cdot \mu) \odot x$ ، $\forall x \in E, \lambda, \mu \in K$

d) $1 \odot x = x \quad , \forall x \in E$

نرمز لاحقا لـ $\oplus$ و $\odot$ بـ $+$ و $\cdot$ وليس بالضرورة يكونو الجمع والجداء المعتادين.

عناصر E تسمى الأشعة، و 0_E يسمى الشعاع المعدوم.
عناصر K تسمى السلميات و 0_K يسمى الصفر.

مثال: المجموعة $\mathbb{R}^2$ المزودة بالعمليتين التاليتين:

$$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} : \quad (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad \lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

فضاء شعاعي.

1) الفضاءات الشعاعية الجزئية:

تعريف: مجموعة جزئية F غير خالية من فضاء شعاعي E على K
تسمى فضاء شعاعي جزئي من E إذا كان $(F, +, \cdot)$ فضاء شعاعي على $(K, +, \cdot)$.

من هذا التعريف ، $(F, *, \odot)$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $(E, *, \odot)$

إذا تحقق :

1) $x \in F, y \in F \Rightarrow x * y \in F$

2) $\forall x, y, z \in F \quad (x * y) * z = x * (y * z)$

3) $\forall x, y \in F \quad x * y = y * x$

4) $x * 0 = x \ , \ x \in F$ حيث 0 العنصر الحيادي للعملية $*$ $0 \in F \subset E$

5) $\forall x \in F, \exists x' \in F \ / \ x * x' = 0$

6) $\lambda \in K, x \in F \Rightarrow \lambda \odot x \in F$

7) $\lambda \in K$ et $x, y \in F \quad \lambda \odot (x * y) = \lambda \odot x * \lambda \odot y$

8) $\lambda, \mu \in K, x \in F \quad (\lambda * \mu) \odot x = \lambda \odot x * \mu \odot x$

9) $x \in F$ et $\lambda, \mu \in K \quad \lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda \odot \mu) \odot x$

10) $1 \odot x = x, \forall x \in F$ ، حيث 1 العنصر الحيادي بالنسبة $(1 \in K)$.

ملاحظة : لكي نبرهن أن جزء غير خالي من فضاء شعاعي هو فضاء شعاعي جزئي نستعمل النظرية التالية :

نظرية : ليكن F جزء غير خالي من الفضاء الشعاعي $(E, *, \odot)$ على الحقل K . F فضاء شعاعي جزئي من $E \Leftrightarrow (x, y \in F \Rightarrow x * y \in F$ et $\lambda \in K, x \in F \Rightarrow \lambda \odot x \in F)$

مثال : المجموعة $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y = 0\}$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$. بالفعل : $(0, 0) \in E$

و $(x_1, y_1) \in E$ et $(x_2, y_2) \in E \Rightarrow$

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in E$$

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = 0$$

ونفس الشيء من أجل $\lambda \odot (x_1, y_1) \in E$

نظرية : كل تقاطع للفضاءات شعاعية جزئية من فضاء شعاعي E هو فضاء شعاعي جزئي من E.

مثال :

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y - z = 0\}$$

$E_1 \cap E_2 = \{(0, y, -y) \in \mathbb{R}^3\} \Rightarrow$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

تعريف: لتكن A جزء غير خالي من الفضاء الشعاعي E. تقاطع كل الفضاءات الشعاعية الجزئية من E التي تحوي A يسمى فضاء شعاعي جزئي مولد بـ A، ونرمز له بـ:

$$[A] = \bigcap_{F\in \mathcal{F}} F$$

حيث $\mathcal{F}$ هي مجموعة كل الفضاءات الشعاعية الجزئية التي تحوي A.

ملاحظة: الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بـ A هو أصغر فضاء شعاعي جزئي يحوي A (بالنسبة للاحتواء).

تعريف: لتكن $\{x_1,x_2,\dots,x_p\}$ مجموعة من p عنصر للفضاء الشعاعي E على $\mathbb{K}$. عنصر x من E يسمى مزج خطي من $x_1,x_2,\dots,x_p$ إذا أوجد $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$ حيث $x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_px_p$

ملاحظة: مجموعة كل المزوج الخطية من $x_1,x_2,\dots,x_p\in E$ هي فضاء شعاعي جزئي من E.

نظرية: لتكن $A=\{x_1,x_2,\dots,x_p\}$ مجموعة من p عنصر من ف.ش E على $\mathbb{K}$. إذن ف.ش.ج المولد بـ A هو نفسه ف.ش.ج لكل المزوج الخطية من $x_1,x_2,\dots,x_p$

مثال: لتكن $A=\{(1,0),(0,1)\}\subset\mathbb{R}^2$، إذن ف.ش.ج المولد بـ A هو

$$[A]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,y)=x(1,0)+y(0,1),\ x,y\in\mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

2) مجموع فضاءات شعاعية جزئية، الفضاء الشعاعي الجزئي المكمل:

نظرية: ليكن E_1 و E_2 ف.ش.ج من E، المجموعة

$$E_1+E_2=\{x_1+x_2 \mid x_1\in E_1 \text{ و } x_2\in E_2\}$$

تتطابق مع ف.ش.ج المولد من $E_1\cup E_2$.

E_1+E_2 تسمى ف.ش.ج المجموع لـ E_1 و E_2.

ملاحظة: بصفة عامة $E_1\cup E_2$ ليس ف.ش.ج من E.

تعريف: فضاءات شعاعيين جزئيين من E يسميان ف.ش.ج مكملة لـ E إذا كل عنصر x من E يكتب بصفة وحيدة كما يلي:

$$x=x_1+x_2,$$

حيث $x_1\in E_1$ و $x_2\in E_2$.