الفصل الثاني:

التطبيقات الخطية

تعريف: ليكن E و E' فضاءين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و $T: E \to E'$ تطبيق، نقول أن T يسمى تطبيق خطي إذا تحقق:

1) $\forall x,y \in E , \; T(x+y)=T(x)+T(y)$

2) $\forall x\in E , \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad T(\alpha x)=\alpha T(x)$

ونقول أن T تشاكل من E نحو E'.

T تطبيق خطي $\iff \forall x,y\in E , \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K} , T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$

مثال: ليكن $E=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} / f$ مستمرة على $[a,b]\}$

التطبيق $T: E\to \mathbb{R}$ المعرف بـ:

$$T(f)=\int_a^b f(x)\,dx$$

هو تطبيق خطي. بالفعل

$$T(\alpha f+\beta g)=\int_a^b(\alpha f+\beta g)(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$$

$$=\alpha T(f)+\beta T(g)$$

نظرية: ليكن E و E' فضاءين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$، $B=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ أساس لفضاء E و $B'=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ جزء من E'، إذن يوجد تطبيق وحيد T من E نحو E' حيث:

$$T(e_i)=b_i \quad i=1,2,\dots,n$$

تعريف: ليكن $T: E\to E'$ تطبيق خطي، إذن:

1) مجموعة العناصر x حيث $T(x)=0$ تسمى نواة التطبيق T ونرمز لها بـ:

$$\ker T=\{x\in E / T(x)=0\}$$

2) $T(E)=\{y\in E' / T(x)=y , x\in E\}$

تسمى صورة التطبيق الخطي T ونرمز لها ب ImT.

مثال: ليكن $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف ب:

$$T(e_1) = 2e_1 + e_2, \quad T(e_2) = e_1 - e_2$$

حيث $e_1 = (1,0)$ و $e_2 = (0,1)$

ليكن $x = (x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$

لدينا:

$$T(x) = T(x_1 e_1 + x_2 e_2)$$
$$= x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2)$$
$$= x_1(2e_1 + e_2) + x_2(e_1 - e_2)$$
$$= (2x_1 + x_2) e_1 + (x_1 - x_2) e_2$$
$$T(x) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

$$T(x,y) = T(xe_1 + ye_2)$$
$$= xT(e_1) + yT(e_2)$$
$$= x(2e_1 + e_2) + y(e_1 - e_2)$$
$$= (2x+y)e_1 + (x-y)e_2$$
$$= (2x+y, x-y)$$

لدينا

$$\ker T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / T(x) = (0,0)\}$$
$$= \{(x_1, x_2) / 2x_1 + x_2 = 0 \text{ و } x_1 - x_2 = 0\}$$
$$\ker T = \{(0,0)\}$$

و $\mathrm{Im}T = \{T(x) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

نظرية: ليكن T تطبيق خطي من E نحو E' اذن:

1) T متباين $\Longleftrightarrow \ker T = \{0_E\}$

2) T غامر $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}T = E'$

نظرية: ليكن $T: E \to E'$ تطبيق خطي، اذا كانت $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ مجموعة مولدة منتهية لـ E فان $T(G)$ مجموعة مولدة لـ $T(E)$.

نظرية: ليكن T تطبيق خطي من E نحو E'.

1) اذا كانت A مجموعة مرتبطة خطيا في E فان $T(A)$ مجموعة مرتبطة من E'.

2) اذا كانت B مجموعة من E، $T(B)$ مستقلة خطيا فان B مجموعة مستقلة خطيا من E.

ملاحظة: ليكن $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ جزء مستقل خطيا من E و $T: E \to E'$ تطبيق خطي، اذن $\{T(a_1), \dots, T(a_n)\}$ جزء مستقل خطيا من E'.

نظرية: ليكن E و E' فضائين شعاعيين على الحقل $\mathbb{K}$، ذو بعد منتهيين، و $T: E \to E'$ تطبيق خطي، اذن القضيتين التاليتين متكافئتين:

1. T تشاكل (تماثل، تقابلي)
2. $\ker T = \{0\}$ و $\dim E = \dim E'$

نظرية: ليكن E و E' فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و $T: E \to E'$ تطبيق خطي، اذن:

$$\dim E = \dim \operatorname{Im}(T) + \dim \ker T.$$

عمليات على التطبيقات الخطية:

1. ليكن E و E' فضائين شعاعيين على $\mathbb{K}$ و $a \in \mathbb{K}$. وليكن $f: E \to F$ و $g: E \to F$ تطبيقين خطيين. اذن $f+g$ و (af) المعرفين بـ:

$$(af)(x) = af(x)$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

تطبيقان خطيان من E نحو F.

2. ليكن E، F و G ثلاث فضاءات شعاعية على حقل $\mathbb{K}$ وليكن $f: E \to F$ و $g: F \to G$ تطبيقين خطيين. اذن $g \circ f$ تطبيق خطي من E نحو G.

3. إذا كان f تشاكلا من E نحو F فإن f^{-1} تشاكلا من F نحو E.

نظرية التمييز: ليكن f تطبيقا خطيا من E نحو F و B أساسا لـ E.

1. f متباين اذا وفقط اذا كانت $f(B)$ مستقلة.
2. f غامر اذا وفقط اذا كانت $f(B)$ مولدة لـ F.
3. f تشاكلا اذا وفقط اذا كانت $f(B)$ أساسا لـ F.

مثال 1

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (-x+y+z,\, x-y+z)$$

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; f(x,y,z) = (0,0)\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -x+y+z = 0 \text{ و } x-y+z = 0\}$$

$$\begin{cases} -x+y+z = 0 \\ x-y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\ker f = \{(x,x,0) / \; x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,1,0) / \; x \in \mathbb{R}\}$$

نلاحظ أن $\ker f$ هو فضاء جزئي لـ $\mathbb{R}^3$ المولد بالشعاع $(1,1,0)$

إذن

$$\dim \ker f = 1$$

لنعين $\operatorname{Im} f$:

$$\operatorname{Im} f = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 / \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ و } f(x,y,z) = (X,Y)\}$$
$$= \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 / \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ و } (-x+y+z,\, x-y+z) = (X,Y)\}$$
$$= \{(-x+y+z,\, x-y+z) / \; x,y,z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{\underbrace{(-x+y)}_{a}(1,-1) + \underbrace{z}_{b}(1,1) / \; x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

إذن $\operatorname{Im} f$ هو فضاء جزئي لـ $\mathbb{R}^2$ المولد بـ $(1,-1)$ و $(1,1)$

وهما مستقلان خطيا إذن يشكلان أساسا لـ $\operatorname{Im} f$

$$\dim \operatorname{Im} f = 2$$