حل السلسلة رقم (2) في مقياس الاقتصاد الجزئي (2)

تمرين 1

لدينا دالة التكاليف الكلية

$CT = Q^3 - 15Q^2 + 76,25Q$

1- هذه الدالة تتعلق بالمدى الطويل لأنها لا تحتوي تكاليف ثابتة (CF=0) وكل حدود هذه الدالة تابعة للانتاج Q أي أنها تكاليف متغيرة.

2- إيجاد دالتي التكلفة المتوسطة الكلية والتكلفة الحدية.

أ- التكلفة المتوسطة الكلية:

$$CTM_{LT} = \frac{CT_{LT}}{Q}$$

$$CTM_{LT} = Q^2 - 15Q + 76,25$$

ب- التكلفة الحدية:

$$Cm_{LT} = \frac{dCT_{LT}}{dQ} = 3Q^2 - 30Q + 76,25$$

3- يلتقي منحنيا التكلفة الحدية والتكلفة المتوسطة الكلية (في المديين الطويل والقصير) عند الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة الكلية.

- حساب حجم الإنتاج المقابل لذلك

تكون CTM عند حدها الأدنى عندما:

1) الشرط الأول: المشتق الأول =0

$$\frac{dCTM}{dQ} = 0 \Rightarrow 2Q - 15 = 0$$

$$2Q = 15 \Rightarrow Q = 7,5$$

2) الشرط الثاني: المشتق الثاني >0

$$\frac{d^2CTM}{dQ^2} > 0 \Rightarrow 2 > 0$$

ومنه تصل CTM إلى حدها الأدنى عند $\boxed{Q = 7,5}$

4- حساب الحد الأدنى للتكلفة الحدية:

لدينا:

$$Cm = 3Q^2 - 30Q + 76,25$$

تكون Cm عند حدها الأدنى عندما:

$$1) \frac{dCm}{dQ} = 0$$

$$\Rightarrow 6Q - 30 = 0$$

$$6Q = 30 \Rightarrow \boxed{Q = 5}$$

$$2) \frac{d^2Cm}{dQ^2} > 0 \Rightarrow 6 > 0$$

ومنه الحد الأدنى للتكلفة الحدية:

$$Cm = 3(5)^2 - 30(5) + 76,25$$

$$\boxed{Cm = 1,25}$$

- مدى منطقية النتيجة:

نقارن بين Min CTM و Min Cm

فإذا لاحظنا أن Min CTM > Min Cm فإن النتيجة منطقية.

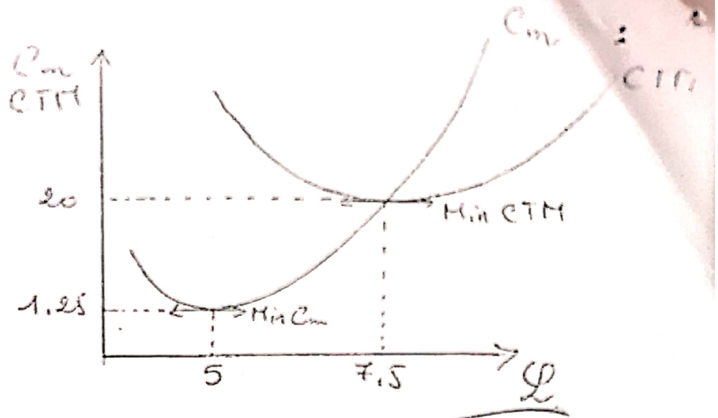
لأن Cm تصل إلى حده الأدنى قبل وصول CTM

ومنه الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة الكلية:

$$CTM = (7,5)^2 - 15(7,5) + 76,25$$

$$\boxed{CTM = 20}$$

ومنه: Min CTM = 20 > Min Cm = 1,25 والنتيجة منطقية. بالإضافة إلى أن Q المقابلة لـ Min Cm > Q المقابلة لـ Min CTM



تمرين (2)

لدينا دالة الانتاج:

$Q = L^{0,25} . K^{0,25}$

وأسعار عناصر الانتاج:

$P_L = 5$, $P_K = 10$

1- حساب التكلفة الكلية في المدى الطويل CT_{LT}.

لحساب ذلك لا بد من توفر 3 معلومات

أ - دالة الانتاج: $Q = L^{0,25} . K^{0,25}$

ب - معادلة التكلفة المتساوية.

$CT = 5L + 10K$

د - معادلة مسار التوسع:

نحصل عليها من خلال شرط التوازن

$$\frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{\cancel{0,25} L^{-0,75} . K^{0,25}}{\cancel{0,25} L^{0,25} . K^{-0,75}} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{1}{2} \Rightarrow K = \frac{1}{2} L$$

وهي معادلة مسار التوسع ومنها نجد

$$L = 2K$$

نعوض K في دالة الإنتاج:

$$Q = L^{0,25} . \left(\frac{1}{2} L\right)^{0,25}$$

$$Q = (1/2)^{0,25} . L^{0,5}$$

$$L^{0,5} = \frac{Q}{\left(\frac{1}{2}\right)^{0,25}}$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$L = \frac{Q^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{0,5}} = \frac{Q^2}{\frac{1^{0,5}}{2^{0,5}}} = \sqrt{2}\, Q^2$$

نعوض L في دالة الانتاج

$$Q = (2K)^{0,25} . K^{0,25}$$

$$Q = 2^{0,25} . K^{0,5}$$

$$K^{0,5} = \frac{Q}{2^{0,25}}$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$K = \frac{Q^2}{\sqrt{2}}$$

نعوض كلا من L و K (اللتان بدلالة Q) في معادلة التكلفة المتساوية.

$$CT = K P_K + L P_L$$

$$CT = 10K + 5L$$

$$CT = 10\left(\frac{Q^2}{\sqrt{2}}\right) + 5\sqrt{2}\, Q^2$$

$$CT = Q^2\left(\frac{10}{\sqrt{2}} + 5\sqrt{2}\right)$$

$$CT_{LT} = \frac{20}{\sqrt{2}} Q^2$$

أو:

$$CT_{LT} = 10\sqrt{2}\, Q^2$$

وهي دالة التكلفة الكلية في المدى الطويل.

- دالة التكلفة المتوسطة الكلية في المدى الطويل CTM_{LT}.

$$CTM_{LT} = CT_{LT} / Q$$

$$CTM_{LT} = \frac{10\sqrt{2}\, Q^2}{Q} = 10\sqrt{2}\, Q$$

- التكلفة الحدية في المدى الطويل:

$$Cm_{LT} = \frac{dCT_{LT}}{dQ} = 20\sqrt{2}\,Q$$

2- إيجاد دوال التكلفة الكلية، التكلفة المتوسطة الكلية، والتكلفة الحدية في المدى القصير:

لدينا: $K = 16$

تصبح دالة الإنتاج:

$$Q = 16^{0,25} . L^{0,25}$$

بما أن: $16^{0,25} = 2$

فإن: $Q = 2 . L^{0,25}$

$$L^{0,25} = \frac{Q}{2} \Rightarrow L = \frac{Q^4}{16}$$

$$CT_{CT} = 5L + 16.10 = 5L + 160$$

$$CT_{CT} = 5\left(\frac{Q^4}{16}\right) + 160$$

$$CT_{CT} = \frac{5}{16} Q^4 + 160$$

وهي دالة التكلفة الكلية في المدى القصير

- دالة التكلفة المتوسطة في المدى القصير:

$$CTM_{CT} = \frac{CT_{CT}}{Q}$$

$$CTM_{CT} = \frac{5}{16} Q^3 + \frac{160}{Q}$$

- دالة التكلفة الحدية في المدى القصير:

$$Cm_{CT} = \frac{dCT_{CT}}{dQ}$$

$$Cm_{CT} = \frac{5}{4} Q^3$$

تمرين $\boxed{13}$

لدينا دالة التكلفة الكلية:

$$CT = Q^3 - 5Q^2 + 13Q + 2$$

1- كمية الإنتاج المثلى لهذه المؤسسة

تتوازن المؤسسة عند تحقق الشرطين

أ- $P = Cm$

ب- $\frac{dCm}{dQ} > 0$

بتطبيق الشرط الأول:

$$P = Cm \Rightarrow 10 = 3Q^2 - 10Q + 13$$

$$\Rightarrow 3Q^2 - 10Q + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (10)^2 - 4(3)(3)$$

$$\Delta = 100 - 36 = 64 , \sqrt{\Delta} = 8$$

$$Q_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,33$$

$$Q_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{10 + 8}{6} = 3$$

بتطبيق الشرط الثاني:

$$\frac{dCm}{dQ} > 0 \Rightarrow 6Q - 10 > 0$$

$$\Rightarrow 6Q > 10$$

$$\Rightarrow Q > 10/6 = 1,66$$

ومنه مستوى الإنتاج الأمثل

$$Q = 3$$

2- حساب الربح الأعظمي:

$$\pi = RT - CT = 10Q - Q^3 + 5Q^2 - 13Q - 2$$

$$\pi = -Q^3 + 5Q^2 - 3Q - 2$$

$$\pi^* = -(3)^3 + 5(3)^2 - 3(3) - 2$$

$$\pi = -27 + 45 - 9 - 2 = 7$$

3- إيجاد دالة عرض هذه المؤسسة:

نجد دالة العرض من خلال شرط توازن المنتج

$P = Cm \Rightarrow P = 3Q^2 - 10Q + 13$

حيث: $P \geq Min\ CVM$

ومنه لابد من إيجاد $Min\ CVM$ وهو حد الإغلاق

$S_F = Min\ CVM$

$CVM = \frac{CV}{Q} = Q^2 - 5Q + 13$

تصل CVM إلى حدها الأدنى عندما:

$\frac{dCVM}{dQ} = 0 \Rightarrow 2Q - 5 = 0$

$2Q = 5 \Rightarrow Q = 5/2$

$Min\ CVM = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 13$

$CVM = 6,75$

ومنه دالة العرض:

$$\begin{cases} P = 3Q^2 - 10Q + 13 & : P \geq 6,75 \\ Q_s = 0 & : P < 6,75 \end{cases}$$

تمرين $\boxed{4}$

لدينا دالة التكلفة الكلية:

$CT = 0,5Q^3 - Q^2 + 4Q + 4$

1- إيجاد دوال التكلفة

$CTM = \frac{CT}{Q} = 0,5Q^2 - Q + 4 + \frac{4}{Q}$

$CVM = \frac{CV}{Q} = 0,5Q^2 - Q + 4$

$CFM = \frac{CF}{Q} = \frac{4}{Q}$

$Cm = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 1,5Q^2 - 2Q + 4$

2- يلتقي منحنيا التكلفة الحدية والتكلفة المتوسطة المتغيرة عند الزاوية الصغرى للتكلفة المتوسطة المتغيرة

تصل CVM إلى حدها الأدنى عندما يكون مشتقها يساوي الصفر

$\frac{dCVM}{dQ} = 0 \Rightarrow Q - 1 = 0$

$\Rightarrow Q = 1$

ومنه عند مستوى الإنتاج $Q = 1$ يلتقي منحنيا Cm و CVM وتكون قيمتيهما متساويتان

$Cm = 1,5(1)^2 - 2(1) + 4 = 3,5$

$CVM = 0,5(1)^2 - 1 + 4 = 3,5$

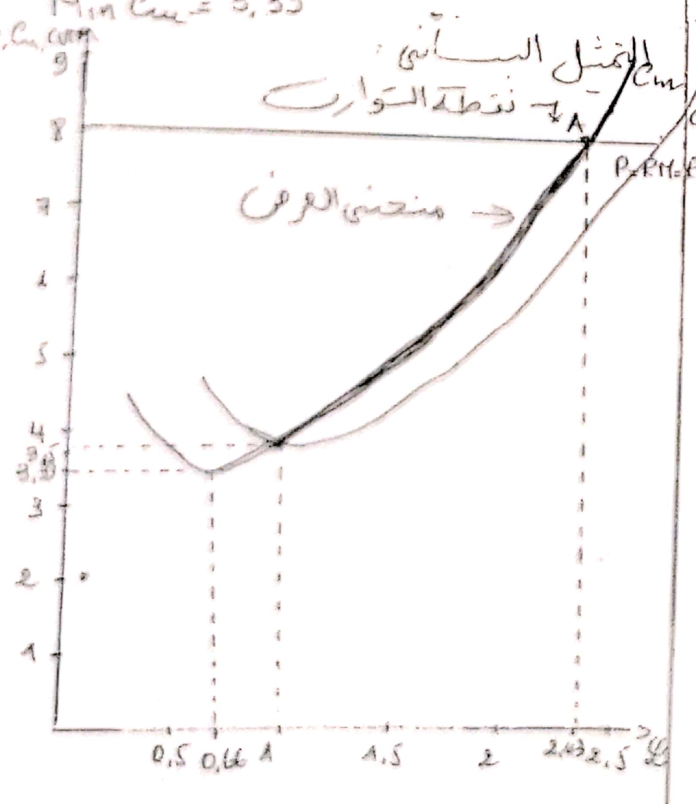
للقيام بعملية التمثيل البياني لـ Cm و CVM لابد من حساب الحد الأدنى لـ Cm

$\frac{dCm}{dQ} = 0 \Rightarrow 3Q - 2 = 0$

$Q = 2/3 = 0,66$

ومنه $Min\ Cm = 1,5(2/3)^2 - 2(2/3) + 4$

$Min\ Cm = 3,33$



3 - تبيع المؤسسة منتجها في سوق المنافسة التامة عند $P=8$ ؟

3 - 1 - إيجاد كمية الإنتاج المثلى

شرط توازن المؤسسة في سوق المنافسة التامة:

أ - $P = C_m$

ب - $\frac{dC_m}{dQ} > 0$

ج - $P = C_m \Rightarrow 8 = 1,5Q^2 - 2Q + 4$

$\Rightarrow 1,5Q^2 - 2Q - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4AC = 4 - 4(1,5)(-4)$

$\Delta = 28 \ , \ \sqrt{\Delta} = 5,29$

$Q_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+5,29}{3} = 2,43$ مقبول

$Q_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-5,29}{3} = \frac{-3,29}{3} < 0$ مرفوض

ومنه كمية الإنتاج المثلى:

$Q = 2,43$

- حساب قيمة الربح الكلي:

$\pi = RT - CT = 8Q - 0,5Q^3 + Q^2 - 4Q - 4$

$\pi = -0,5Q^3 + Q^2 + 4Q - 4$

$\pi = -0,5(2,43)^3 + (2,43)^2 + 4(2,43) - 4$

$\pi = 4,45$

- حساب الربح المتوسط:

$\pi_M = \frac{\pi}{Q} = \frac{4,45}{2,43} = 1,83$

3 - 2 - التمثيل البياني لتوازن المنتج في البيان السابق: يتحقق توازن المؤسسة عند ما يقطع منحنى C_m خط السعر P عند النقطة A ولما يكون C_m آخذ في الارتفاع (ميل C_m موجب)

3 - 3 تنسحب المؤسسة من السوق في المدى القصير

إذا انخفض سعر السوق إلى ما دون الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة المتغيرة أي حد الإغلاق.

حيث نعلم من السؤال ① أن حد الإغلاق

$S_F = Min\ CVM = 3,5$

ومنه إذا انخفض سعر السوق عن $P = 3,5$ تنسحب المؤسسة من السوق.

4 - دالة عرض المؤسسة:

نجدها من شرط توازن المؤسسة

$P = C_m \Rightarrow P = 1,5Q^2 - 2Q + 4$

ونعلم أن عتبة حد الإغلاق

$S_F = 3,5$

ومنه دالة العرض:

$$\begin{cases} P = 1,5Q^2 - 2Q + 4 & ; P \geq 3,5 \\ Q_s = 0 & ; P < 3,5 \end{cases}$$

التمثيل البياني لمنحنى العرض يكون بالخط السميك على منحنى C_m ويبدأ من نقطة تقاطع C_m مع CVM أي الحد الأدنى لـ CUM

تمرين 5

لدينا دالة الطلب الكلي في سوق المنافسة التامة:

$Q_d = -2P + 800$

ودالة التكلفة لكل مؤسسة:

$CT = Q^2 + 40Q + 400$

وعدد المؤسسات $N = 20$

1 - حساب سعر وكمية توازن السوق

لحساب ذلك لا بد من إيجاد دالة عرض السوق التي نجدها من خلال دالة عرض كل مؤسسة

انطلاقا من شرط التوازن:

$P = C_m \quad / C_m = \frac{dCT}{dQ} = 2Q + 40$

ومنه: $P = C_m \Rightarrow P = 2Q + 40$

ومنه دالة عرض كل مؤسسة:

$$Q_s = -20 + \frac{1}{2}P$$

ودالة عرض السوق:

$$Q_s = 20\,Q_s = 20\left(-20 + \frac{1}{2}P\right)$$

$$Q_s = -400 + 10P$$

ومنه يتوازن السوق عندما:

$$Q_s = Q_d \Rightarrow -400 + 10P = -2P + 800$$

$$\Rightarrow 12P = 1200 \Rightarrow P^* = 100$$

$$Q^* = -2(100) + 800 \Rightarrow Q^* = 600$$

2- تحديد عتبة المردودية وحد الإغلاق لكل مؤسسة.

أ- عتبة المردودية،

$$S_R = Min\ CTM$$

$$CTM = \frac{CT}{Q} = Q + 40 + \frac{400}{Q}$$

تكون CTM عند حدها الأدنى عندما:

ش1: $\frac{dCTM}{dQ} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{400}{Q^2} = 0$

$$\Rightarrow Q^2 = 400 \Rightarrow Q = 20$$

ومنه: $Min\ CTM = 20 + 40 + \frac{400}{20} = 80$

ش2: $\frac{d^2CTM}{dQ^2} > 0 \Rightarrow \frac{800}{Q^3} > 0$

ومنه عتبة المردودية $S_R = Min\ CTM = 80$

ب- حد الإغلاق:

$$S_F = Min\ CVM$$

$$CVM = \frac{CV}{Q} = Q + 40$$

(CVM معادلة خطية ليست لها نهاية صغرى نجد Min CVM بتساوي CVM و Cm) نجد الحد الأدنى لـ CVM تتقاطع منحنيي Cm و CVM

$$CVM = C_m \Rightarrow Q + 40 = 2Q + 40$$

$$Q = 2Q \Rightarrow Q = 0$$

بالتعويض في CVM:

$$Min\ CVM = 0 + 40 = 40$$

ومنه حد الإغلاق:

$$S_F = Min\ CVM = 40$$

3- حساب الربح المحقق من طرف كل مؤسسة: لإيجاد ذلك لابد من حساب الكمية التوازنية لكل مؤسسة.

شرط توازن المؤسسة:

$$P = C_m \Rightarrow 100 = 2Q + 40$$

$$2Q = 60 \Rightarrow Q = 30$$

وهو الانتاج التوازني لكل مؤسسة

أو: $Q_{\text{مؤسسة}} = \frac{Q_{\text{السوق}}}{N} = \frac{600}{20} = 30$

ومنه ربح كل مؤسسة:

$$\Pi = RT - CT = 100 \times 30 - (30^2 + 40(30) + 400)$$

$$\Pi = 3000 - 2500 = 500$$

4- لدينا ضريبة نوعية t=3 على كل وحدة منتجة: حساب أثر ذلك على السعر، الكمية والربح.

بعد فرض ضريبة نوعية t=3 تصبح دالة التكاليف الكلية،

$$CT = Q^2 + 40Q + 400 + \underbrace{3Q}_{\text{تكلفة الضريبة}}$$

$$CT = Q^2 + 43Q + 400$$

وتصبح دالة عرض كل مؤسسة،

$$P = C_m \Rightarrow P = 2Q + 43$$

$$\Rightarrow Q_s = -21{,}5 + \frac{1}{2}P$$

ودالة عرض السوق،

$$Q_s = 20\left(-21{,}5 + \frac{1}{2}P\right)$$

لدينا $Q_s = -430 + 10P$

عند التوازن:

$$Q_s = Q_d \Rightarrow -2P + 800 = -430 + 10P$$

$$\Rightarrow 1230 = 12P$$

$$\Rightarrow \boxed{P^* = 102,5}$$

$$\Rightarrow Q^* = -2(102,5) + 800 \Rightarrow \boxed{Q^* = 595}$$

الكمية المنتجة لكل مؤسسة:

$$Q = \frac{Q^*}{N} = \frac{595}{20} = \boxed{29,75}$$

الربح لكل مؤسسة:

$$\pi = RT - CT = 102,5 \times 29,75 - (29,75^2 + 43(29,75) + 400)$$

$$\pi = 3049,375 - 2564,31$$

$$\pi = \boxed{485,0625}$$

أثر الضريبة: عند فرض ضريبة نوعية $t = 3$ يؤدي ذلك إلى:

- رفع السعر من 100 إلى 102,5
- تخفيض الكمية المنتجة لكل مؤسسة من 30 إلى 29,75
- تخفيض الربح من 500 إلى 485,0625.

تمرين $\boxed{6}$

لدينا دالة الطلب الكلي في سوق المنافسة التامة في المدى الطويل

$$Q_d = 100 - P$$

ودالة التكلفة المتوسطة لكل مؤسسة:

$$CTM = (Q^2 - 20Q + 200)/10$$

1- الكمية المنتجة التوازنية لكل مؤسسة:

في المدى الطويل يكون شرط توازن المؤسسة

$$P = Cm = CTM$$

لإيجاد Cm نجد أولا CT.

$$CT = CTM \cdot Q$$

$$CT = \frac{1}{10}Q^3 - 2Q^2 + 20Q$$

$$Cm = \frac{dCT}{dQ} = \frac{3}{10}Q^2 - 4Q + 20$$

$$Cm = CTM \Rightarrow \frac{3}{10}Q^2 - 4Q + 20 = \frac{1}{10}Q^2 - 2Q + 20$$

$$\frac{3}{10}Q^2 - \frac{1}{10}Q^2 - 4Q + 2Q + \cancel{20} - \cancel{20} = 0$$

$$\frac{2}{10}Q^2 - 2Q = 0$$

$$Q\left(\frac{2}{10}Q - 2\right) = 0$$

$$Q = 0 \quad \vee \quad \frac{2}{10}Q - 2 = 0$$

$$\frac{2}{10}Q = 2 \Rightarrow 2Q = 20 \Rightarrow Q = 10$$

الكمية المنتجة التوازنية لكل مؤسسة.

طريقة أخرى: نعلم أنه في المدى الطويل تتوازن المؤسسة عند $Min\ CTM$ (أي لما يقطع منحنى Cm منحنى CTM عند حده الأدنى)

$$\frac{dCTM}{dQ} = 0 \Rightarrow \frac{2}{10}Q - 2 = 0$$

$$\Rightarrow Q = 10$$

ومنه تكون قيمة CTM

$$CTM = \frac{1}{10}Q^2 - 2Q + 20 = \frac{10^2}{10} - 2(10) + 20$$

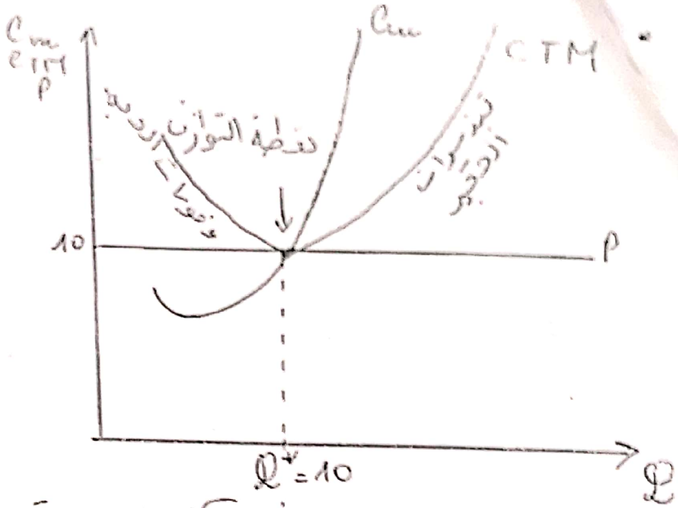
$$CTM = 10$$

ومنه سعر السوق

$$P = CTM = 10$$

وهو السعر الذي يغطي فقط التكلفة المتوسطة، فالمؤسسة تحقق أرباحا عادية فقط $RT = CT \Rightarrow \pi = 0$

2- التمثيل البياني لتوازن المؤسسة:



3 - الحجم الأمثل لكل مؤسسة:
هو الحجم الذي تصل إليه المؤسسة عند وصولها إلى الحد الأدنى لمتوسط التكلفة الكلية في المدى الطويل
ومنه الحجم الأمثل للمؤسسة يساوي حجم الإنتاج التوازني (الذي يقابل Min CTM) وهو: $Q = 10$

4 - تحديد منطقة وفورات وتبذيرات الحجم:
- منطقة وفورات الحجم
وهي منطقة تناقص منحنى التكلفة المتوسطة الكلية في المدى الطويل [وتفسيرها عندما تكبر الطاقة الإنتاجية للمؤسسة ويرتفع مستوى استغلالها، فإن هذا يؤدي إلى تحقيق وفورات اقتصادية تسمى بوفورات الحجم وهي تعمل على انخفاض تكلفة الوحدة في المتوسط مع تزايد حجم المؤسسة]
- منطقة تبذيرات الحجم:
وهي منطقة تزايد التكلفة المتوسطة الكلية في المدى الطويل
[إن اتساع نطاق المؤسسة تواجهه عيوب تبدأ في الظهور عندما يفوق نطاقه حداً معيناً، وتتزايد هذه العيوب مع اتساع حجم المؤسسة، وهي تسمى بتبذيرات الحجم ويؤدي ذلك إلى ارتفاع متوسط التكلفة [الوحدة]

5 - الكمية الكلية المنتجة في السوق:
لدينا دالة الطلب:
$Q = 100 - P = 100 - 10 = 90$
ومنه الكمية الكلية المنتجة 90.

6 - عدد المؤسسات الموجودة في السوق:
بما أن كل المؤسسات لها نفس دالة التكاليف، فإن كل مؤسسة تنتج نفس الكمية.

$$N\ (\text{عدد المؤسسات}) = \frac{\text{الانتاج الكلي}}{\text{إنتاج كل مؤسسة}}$$

$$N = \frac{90}{10} = 9$$