7–التقدير والتنبؤ:

كما رأينا في تحليل الانحدار الخطي البسيط يستخدم نموذج الانحدار المقدر في:

–تقدير القيمة المتوسطة للمتغير التابع.

–التنبؤ بمشاهدة جديدة للمتغير التابع.

7–1تقدير القيمة المتوسطة للمتغير التابع (y):

يتم تقدير القيمة المتوسطة للمتغير التابع ($\hat{}_0$) بالتعويض بنموذج الانحدار المقدر وذلك كما يلي:

$$\hat{y}_0 = x_0 b$$

حيث b: هو متجه عمودي يحتوي على معالم نموذج الانحدار المقدرة.

X_0: هو متجه أفقي يحتوي على قيم المتغيرات المستقلة المراد عندها تقدير قيمة متوسطة للمتغير التابع $x_0=(1,x_{01},x_{02},\dots,x_{0k})$

حيث يكون:

$$\hat{\sigma}^2(\hat{y}_0) = x_0 \sigma^2 (x^T x)^{-1} {x^T}_0$$

وبما أن σ^2 مجهولة فإننا نقدره بـ $S_e{}^2$ لتصبح المعادلة كما يلي:

$$\hat{\sigma}^2(\hat{y}_0) = x_0 S_e^2 (x^T x)^{-1} {x^T}_0$$

وعليه فإن فترة الثقة للقيمة المتوسطة لـ y تعطى بالصيغة التالية:

$$\left[\hat{y}_0 \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2}/df)} . \hat{\sigma}^2(\hat{y}_0)\right]$$

مثال:

اعتمادا على نموذج انحدار إنفاق الأسرة على دخلها الشهري وحجم العائلة:

$$\hat{y}_i = -0.16045 + 0.14872x_1 + 0.07691x_2$$

1–قدر القيمة المتوسطة لإنفاق الأسرة عندما يكون دخلها الشهري ($x1=1$)وحجم العائلة ($x2=3$)؟

2–حدد فترة الثقة 95% لهذا التقدير؟

الحل:

1–تقدير القيمة المتوسطة لإنفاق الأسرة عندما يكون $x_1 = 1$، $x_2 = 3$:

$$X_0 = (1 \quad 1 \quad 3)$$

$$\hat{y}_0 = x_0 b$$

$$= (1 \quad 1 \quad 3)\begin{pmatrix} -0.16045 \\ 0.14872 \\ 0.07691 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y}_0 = 0.219$$

إذن القيمة المتوسطة لإنفاق الأسرة التي دخلها الشهري 1 (ألف دولار) وحجمها 3 أفراد هو 0.219 (ألف دولار).

2–تحديد فترة الثقة 95% لهذا التقدير:

إن فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي:

$$\left[\hat{y}_0 \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2}/df)} . \hat{\sigma}^2(\hat{y}_0)\right]$$

$$\hat{\sigma}^2 \hat{y}_0 = x_0 S_e^2 [(x_0 (x^T x)^{-1} x^T{}_0)]$$

اعتمادا على ما سبق فإننا نجد:

$$\hat{\sigma}^2 \hat{y}_0 = 0.00109$$

ومنه تكون فترة الثقة المطلوبة:

$$[0.147059, 0.290940]$$

وعليه نقول لدينا ثقة *95%* بأن إنفاق الأسرة التي دخلها الشهري ($x_1=1$ ألف دولار) وحجم العائلة ($x_2=3$) يترواح ما بين 0.147059 كحد أدنى (ألف دولار) و0.290940 (ألف دولار) كحد أعلى.

2-7التنبؤ بمشاهدة جديدة للمتغير التابع(y):

يتم إيجاد القيمة المتوقعة والتباين الخاص بالتنبؤ بمشاهدة جديدة لـ y كما يلي:

-القيمة المتوقعة لـ y_0: نعلم أن:

$$y_0 = \hat{y} + \xi_0$$

$$y_0 = x_0 b_0 + \xi_0$$

$$E(y_0) = E(x_0 b_0) + E(\xi_0)$$

$$= x_0 E(b_0) + 0$$

نعلم أن:

$$E(\xi) = 0$$

إذن:

$$E(y_0)= x_0B$$

أما التباين y_0:

$$\hat{\sigma}^2(\hat{y}_0) = \sigma^2[1 + (x_0(x^T x)^{-1}x^T{}_0)]$$

وبما أن σ^2 مجهولة نقدرها بـ $S_e{}^2$ لتكون العلاقة كما يلي:

$$\hat{\sigma}^2(\hat{y}_0) = S_e^2[1 + (x_0(x^T x)^{-1}x^T{}_0)]$$

وعليه فإن فترة التنبؤ المطلوبة تأخذ الشكل التالي:

$$(x_0\mathrm{b}) \pm \mathrm{t}_{(1-\frac{\alpha}{2}/,\mathrm{df})} \cdot \sqrt{S_e^2[1 + (x_0(x^T x)^{-1}x^T{}_0)]}$$

مثال:

اعتمادا على نموذج انحدار إنفاق الأسرة على دخلها الشهري وحجم العائلة:

$$\hat{y}_i = -0.16045 + 0.14872x_1 + 0.07691x_2$$

1-تنبأ بالقيمة المتوسطة لإنفاق الأسرة عندما يكون دخلها الشهري ($x_1=1$)وحجم العائلة ($x_2=3$)؟

2-حدد فترة الثقة 95% للتنبؤ بمشاهدة جديدة لإنفاق الأسرة (عند نفس المعطيات السابقة)؟

الحل:

1-التنبؤ بالقيمة المتوسطة لإنفاق الأسرة عندما يكون $x_1 =1$، $x_2 =3$ هي نفس القيمة المقدرة السابقة أي:

$$\hat{y}_0 = 0.219$$

إذن القيمة المتوسطة لإنفاق الأسرة التي دخلها الشهري 1 (ألف دولار) وحجمها 3 أفراد هو 0.219 (ألف دولار).

2–تحديد فترة الثقة *95%* للتنبؤ بمشاهدة جديدة لإنفاق الأسرة عند نفس المعطيات السابقة:

إن فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\hat{y}_0 \pm \mathrm{t}_{(1-\frac{\alpha}{2}/,\mathrm{df})} \cdot \sqrt{S_e^2[1 + (x_0(x^T x)^{-1} {x^T}_0)]}$$

$$[0.035135,\ 0.402864]$$

وعليه نقول لدينا ثقة *95%* بأن تتنبأ بأن إنفاق الأسرة التي دخلها الشهري ($x_1=1$ ألف دولار) وحجم العائلة ($x_2=3$) يترواح ما بين *0.035135* كحد أدنى (ألف دولار) و *0.402864* (ألف دولار) كحد أعلى.