Université Mohamed Khider, Biskra 2019/2020
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Master 1: **M1.4 (Modèle linéaire)**

Solution de la troisième partie de l'exercie N°3 de la Série N°2

* *

Exercice 1 *Suite de l'exercice 1, et 2.*

1- Déduire, de l'exercie 2, une base $D_r^{-1}-$orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

2-Déterminer les composantes principales des profils-lignes et déduire celles des profils-colonnes.

3-Quelle sont les valeurs de l'espérance et la variance (empiriques) de chaque composante principale pour les deux profils? Quelles sont les valeurs des corrélations entre les composantes principales? Que peut-on déduire?

4-Déterminer les contributions absolues et relatives, de chaque ligne, aux inerties des axes principaux.

5. Déduire, de la question 2, les coordonnées des lignes des deux nuages de points Y_r et Y_c dans les nouvelles bases associées.

6.Dans le même plan définit pas les deux premiers axes principaux, représenter les deux nuages de point associes à Y_r et Y_c.
7-Analyser et discuter les résultats obtenus.

* *

Solution

Profils-lignes:

$$X_r = \begin{pmatrix} 0.10638 & 0.59574 & 0.25532 & 4.2553 \times 10^{-2} \\ 0.0134 & 4.8576 \times 10^{-2} & 0.35176 & 0.58627 \\ 0.28846 & 0.44231 & 0.19231 & 7.6924 \times 10^{-2} \end{pmatrix},$$

, Correlation matrix: $\begin{pmatrix} 1.0 & 0.5539 & -0.95374 & -0.72141 \\ 0.5539 & 1.0 & -0.77857 & -0.97616 \\ -0.95374 & -0.77857 & 1.0 & 0.89623 \\ -0.72141 & -0.97616 & 0.89623 & 1.0 \end{pmatrix}$, Correlation matrix:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.5539 & -0.95374 & -0.72141 \\ 0.5539 & 1.0 & -0.77857 & -0.97616 \\ -0.95374 & -0.77857 & 1.0 & 0.89623 \\ -0.72141 & -0.97616 & 0.89623 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$D_r = \begin{pmatrix} 0.29616 & 0 & 0 \\ 0 & 0.37618 & 0 \\ 0 & 0 & 0.32766 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = 0.47966, \lambda_2 = 5.3109 \times 10^{-2}, \lambda_3 = 5.997 \times 10^{-7}, \ \lambda_4 = 0.$$

$$u_1^* := \begin{pmatrix} 0.132\,46 \\ 0.325\,89 \\ -9.079\,1\times 10^{-2} \\ -0.367\,58 \end{pmatrix},\ u_2^* := \begin{pmatrix} 0.309\,57 \\ -0.267\,64 \\ -0.106\,4 \\ 6.445\,7\times 10^{-2} \end{pmatrix},$$

$$u_3^* := \begin{pmatrix} 2.242\,0\times 10^{-2} \\ -0.215\,51 \\ 0.421\,87 \\ -0.228\,77 \end{pmatrix},\ u_4^* := \begin{pmatrix} 0.131\,06 \\ 0.339\,63 \\ 0.270\,95 \\ 0.258\,35 \end{pmatrix}.$$

Profils-colonnes:

$$X_c = \begin{pmatrix} 0.240\,39 & 3.846\,3\times 10^{-2} & 0.721\,18 \\ 0.519\,49 & 5.380\,4\times 10^{-2} & 0.426\,72 \\ 0.279\,07 & 0.488\,37 & 0.232\,56 \\ 0.048\,78 & 0.853\,66 & 9.756\,1\times 10^{-2} \end{pmatrix},$$

$$D_c = \begin{pmatrix} 0.131\,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.339\,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.270\,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.258\,35 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 0.479\,66, \lambda_2 = 5.310\,9\times 10^{-2}, \lambda_3 = 0.$$

$$v_k^* := \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} N D_c^{-1} u_k^*, k = 1, 2.$$

$$v_1^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} N D_c^{-1} u_1^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} X_c^t u_1^*$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0.479\,66}} \begin{pmatrix} 0.240\,39 & 3.846\,3\times 10^{-2} & 0.721\,18 \\ 0.519\,49 & 5.380\,4\times 10^{-2} & 0.426\,72 \\ 0.279\,07 & 0.488\,37 & 0.232\,56 \\ 0.048\,78 & 0.853\,66 & 9.756\,1\times 10^{-2} \end{pmatrix}^T$$

$$\times \begin{pmatrix} 0.132\,46 \\ 0.325\,89 \\ -9.079\,1\times 10^{-2} \\ -0.367\,58 \end{pmatrix}$$

$$v_1^* = \begin{pmatrix} 0.227\,95 \\ -0.484\,42 \\ 0.256\,46 \end{pmatrix}$$

$$v_2^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} N D_c^{-1} u_2^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} X_c^t u_2^*$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5.310\,9\times 10^{-2}}} \begin{pmatrix} 0.240\,39 & 3.846\,3\times 10^{-2} & 0.721\,18 \\ 0.519\,49 & 5.380\,4\times 10^{-2} & 0.426\,72 \\ 0.279\,07 & 0.488\,37 & 0.232\,56 \\ 0.048\,78 & 0.853\,66 & 9.756\,1\times 10^{-2} \end{pmatrix}^T$$

$$\times \begin{pmatrix} 0.309\,57 \\ -0.267\,64 \\ -0.106\,4 \\ 6.445\,7\times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$v_2^* = \begin{pmatrix} -0.3956 \\ 2.4677 \times 10^{-3} \\ 0.3931 \end{pmatrix}.$$

Une base D_r^{-1}−orthornormée de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1^* = \begin{pmatrix} 0.22795 \\ -0.48442 \\ 0.25646 \end{pmatrix}, v_2^* = \begin{pmatrix} -0.3956 \\ 2.4677 \times 10^{-3} \\ 0.3931 \end{pmatrix}, v_3^* = \begin{pmatrix} 0.29616 \\ 0.37618 \\ 0.327660 \end{pmatrix}.$$

Composantes principales des profils-lignes:

$$c_k = X_r D_c^{-1} u_k^*, k = 1, 2, 3.$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0.10638 & 0.59574 & 0.25532 & 4.2553 \times 10^{-2} \\ 0.0134 & 4.8576 \times 10^{-2} & 0.35176 & 0.58627 \\ 0.28846 & 0.44231 & 0.19231 & 7.6924 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.13246 \\ 0.32589 \\ -9.0791 \times 10^{-2} \\ -0.36758 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0.53306 \\ -0.89186 \\ 0.54207 \end{pmatrix}.$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 0.10638 & 0.59574 & 0.25532 & 4.2553 \times 10^{-2} \\ 0.0134 & 4.8576 \times 10^{-2} & 0.35176 & 0.58627 \\ 0.28846 & 0.44231 & 0.19231 & 7.6924 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.30957 \\ -0.26764 \\ -0.1064 \\ 6.4457 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} -0.30783 \\ 1.5098 \times 10^{-3} \\ 0.27647 \end{pmatrix}.$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} 0.10638 & 0.59574 & 0.25532 & 4.2553 \times 10^{-2} \\ 0.0134 & 4.8576 \times 10^{-2} & 0.35176 & 0.58627 \\ 0.28846 & 0.44231 & 0.19231 & 7.6924 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2.2420 \times 10^{-2} \\ -0.21551 \\ 0.42187 \\ -0.22877 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} 2.8327 \times 10^{-5} \\ 1.5609 \times 10^{-5} \\ -8.2761 \times 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

$$c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$c_k = Y_r D_c^{-1} u_k^* = \left(X_r - 1_p g_r^t\right) D_c^{-1} u_k^*$$

$$\begin{aligned} c_1 &= Y_r D_c^{-1} u_k^* = \left(X_r - 1_p g_r^t\right) D_c^{-1} u_1^* \\ &= X_r D_c^{-1} u_1^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= Y_r D_c^{-1} u_2^* = \left(X_r - 1_p g_r^t\right) D_c^{-1} u_2^* \\ &= X_r D_c^{-1} u_2^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= Y_r D_c^{-1} u_3^* = \left(X_r - 1_p g_r^t\right) D_c^{-1} u_3^* \\ &= X_r D_c^{-1} u_3^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_4 &= Y_r D_c^{-1} g_r = \left(X_r - 1_p g_r^t\right) D_c^{-1} g_r \\ &= X_r D_c^{-1} g_r - 1_p \end{aligned}$$

En conclusion la matrice des composantes principales des profils-lignes est:

$$C := \begin{pmatrix} 0.533\,06 & -0.307\,83 & 0 & 0 \\ -0.891\,86 & 1.\,509\,8 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0.542\,07 & 0.276\,47 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Composantes principales des profils-colonnes (relations *quasi-barycentriques)*:

$$c_k := \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X_r \widetilde{c}_k \text{ et } \widetilde{c}_k := \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X_c c_k, \ \ k = 1, 2.$$

$$\widetilde{c}_k := \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X_c c_k, \ \ k = 1, 2.$$

$$\begin{aligned} \widetilde{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} X_c c_1 = \frac{1}{\sqrt{0.479\,66}} & \begin{pmatrix} 0.240\,39 & 3.\,846\,3 \times 10^{-2} & 0.721\,18 \\ 0.519\,49 & 5.\,380\,4 \times 10^{-2} & 0.426\,72 \\ 0.279\,07 & 0.488\,37 & 0.232\,56 \\ 0.048\,78 & 0.853\,66 & 9.\,756\,1 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \\ \times & \begin{pmatrix} 0.533\,06 \\ -0.891\,86 \\ 0.542\,07 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0.699\,95 \\ 0.664\,54 \\ -0.232\,08 \\ -0.985\,39 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\widetilde{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} X_c c_2 = \frac{1}{\sqrt{5.3109 \times 10^{-2}}} \begin{pmatrix} 0.24039 & 3.8463 \times 10^{-2} & 0.72118 \\ 0.51949 & 5.3804 \times 10^{-2} & 0.42672 \\ 0.27907 & 0.48837 & 0.23256 \\ 0.04878 & 0.85366 & 9.7561 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} -0.30783 \\ 1.5098 \times 10^{-3} \\ 0.27647 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.54433 \\ -0.18163 \\ -9.0573 \times 10^{-2} \\ 5.7476 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

En conclusion la matrice des composantes principale profils-colonnes est:

$$\widetilde{C} := \begin{pmatrix} 0.69995 & 0.54433 & 0 \\ 0.66454 & -0.18163 & 0 \\ -0.23208 & -9.0573 \times 10^{-2} & 0 \\ -0.98539 & 5.7476 \times 10^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

****

3- a) Les valeurs de l'espérance et la variance de chaque composante principale pour les deux profils:

$$C = \begin{pmatrix} 0.53306 & -0.30783 & 0 & 0 \\ -0.89186 & 1.5098 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0.54207 & 0.27647 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Les valeurs les corrélations entre les composantes principales:

c) Déduction:

****

4. Contribution relative du profil-ligne i de de la matrice Y_r au $k-$ième axe u_k^* :

$$Ctr\,(i,k) := \frac{f_{i\cdot} c_k^2\,(i)}{\sum_{i=1}^{p} f_{i\cdot} c_k^2\,(i)} = \frac{f_{i\cdot} c_k^2\,(i)}{\lambda_k},\ \ i = 1, ..., 3;\ \ k = 1, 2.$$

Contribution relative du profil-colonne j de de la matrice Y_c au $k-$ième axe v_k^* :

$$\widetilde{Ctr}\,(j,k) = \frac{f_{\cdot j} \widetilde{c}_k^2\,(j)}{\sum_{j=1}^{q} f_{\cdot j} \widetilde{c}_k^2\,(j)} = \frac{f_{\cdot j} \widetilde{c}_k^2\,(j)}{\lambda_k},\ \ j = 1, ..., 4;\ \ k = 1, 2.$$

****

Contribution relative du profil-ligne i de de la matrice Y_r au le premier axe u_1^* :

$$Ctr\,(1,1) = \frac{f_{1\cdot} c_1^2\,(1)}{\lambda_1} =,\ \ Ctr\,(2,1) = \frac{f_{2\cdot} c_1^2\,(2)}{\lambda_1},\ \ Ctr\,(3,1) = \frac{f_{3\cdot} c_1^2\,(3)}{\lambda_3}.$$

Alors:

$$C = \begin{pmatrix} 0.53306 & -0.30783 & 0 & 0 \\ -0.89186 & 1.5098 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0.54207 & 0.27647 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.47966, \lambda_2 = 5.3109 \times 10^{-2}$$

$$D_r = \begin{pmatrix} 0.296\,16 & 0 & 0 \\ 0 & 0.376\,18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.327\,66 \end{pmatrix}.$$

$$Ctr\,(1,1) = \frac{0.296\,16\,(0.533\,06)^2}{0.479\,66} 100 = 17.\,545\%,$$

$$Ctr\,(2,1) = \frac{0.376\,18\,(-0.891\,86)^2}{0.479\,6} 100 = 62.\,389\%,$$

et

$$Ctr\,(3,1) = \frac{0.327\,66\,(0.542\,07)^2}{0.479\,6} 100 = 20.\,075\%.$$

Contribution relative du profil-ligne i de de la matrice Y_r au $2-$ième axe u_2^* :

$$C = \begin{pmatrix} 0.533\,06 & -0.307\,83 & 0 & 0 \\ -0.891\,86 & 1.\,509\,8 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0.542\,07 & 0.276\,47 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.479\,66, \lambda_2 = 5.\,310\,9 \times 10^{-2}$$

$$D_r = \begin{pmatrix} 0.296\,16 & 0 & 0 \\ 0 & 0.376\,18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.327\,66 \end{pmatrix}.$$

$$Ctr\,(1,2) = \frac{f_1.c_2^2\,(1)}{\lambda_2} =, \; Ctr\,(2,2) = \frac{f_2.c_2^2\,(2)}{\lambda_2}, \; Ctr\,(3,2) = \frac{f_3.c_2^2\,(3)}{\lambda_2}.$$

Alors

$$Ctr\,(1,2) = \frac{0.296\,16\,(-0.307\,83)^2}{5.\,310\,9 \times 10^{-2}} 100 = 52.\,842\%,$$

$$Ctr\,(2,2) = \frac{0.376\,18\,(1.\,509\,8 \times 10^{-3})^2}{5.\,310\,9 \times 10^{-2}} 100 = 1.\,614\,6 \times 10^{-3}\%,$$

et

$$Ctr\,(3,2) = \frac{0.327\,66\,(0.276\,47)^2}{5.\,310\,9 \times 10^{-2}} 100 = 47.\,158\%.$$

En conclusion la matrice de contributions des profils-lignes sur les deux axes principaux est:

$$\mathbf{Ctr} = \begin{pmatrix} 20.\,07 & 52.\,84 \\ 62.\,38 & 1.\,61 \times 10^{-3} \\ 17.\,54 & 47.\,15 \end{pmatrix} \%$$

****

5. Les coordonnées des lignes des deux nuages de points Y_r et Y_c dans les nouvelles bases associées:

$$Y_r^* = C = \begin{pmatrix} 0.533\,06 & -0.307\,83 & 0 & 0 \\ -0.891\,86 & 1.\,509\,8 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0.542\,07 & 0.276\,47 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_c^* = \widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0.699\,95 & 0.544\,33 & 0 \\ 0.664\,54 & -0.181\,63 & 0 \\ -0.232\,08 & -9.\,057\,3 \times 10^{-2} & 0 \\ -0.985\,39 & 5.\,747\,6 \times 10^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

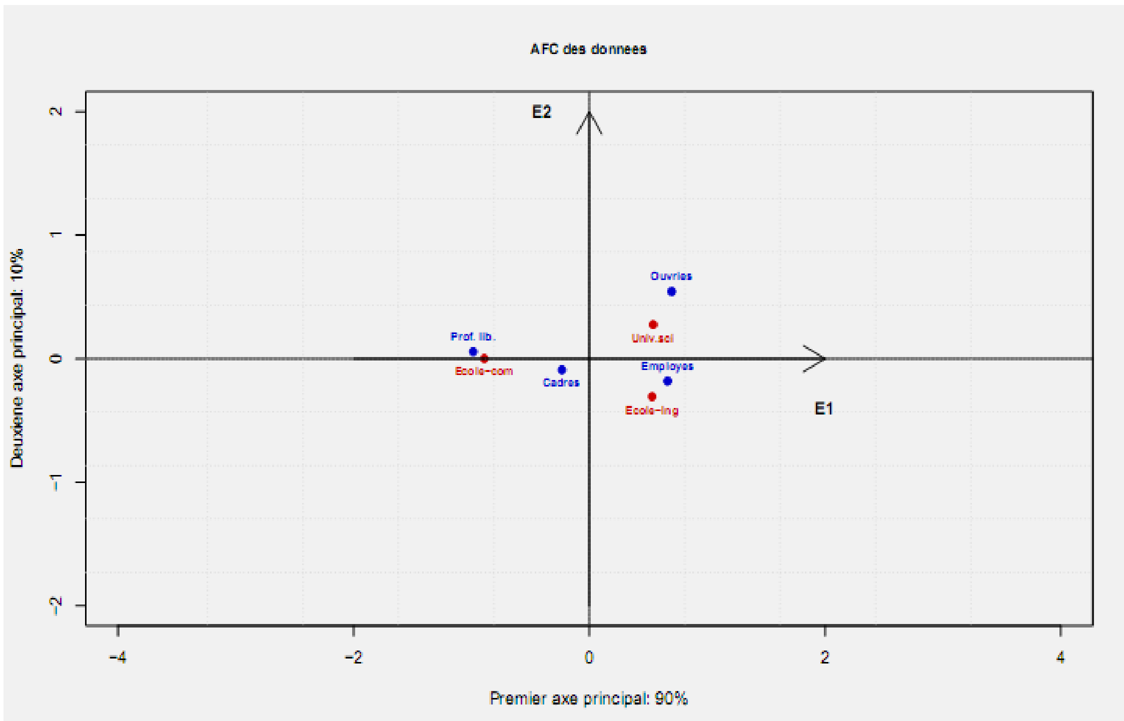
****

6.Dans le même plan définit pas les deux premiers axes principaux, représenter les deux nuages de point associes à Y_r et Y_c :

Nous avons besoin des pourcentages d'inerties:

$$\text{PI du premier axe}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}100=\frac{0.479\,66}{0.479\,66+5.310\,9\times10^{-2}}100=90.\,032\%.$$

$$\text{PI du deuxième axe}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{5.\,310\,9\times10^{-2}}{0.479\,66+5.310\,9\times10^{-2}}100=9.\,968\,5\%$$



7. La dicussion est dans la vidéo correspomdante.