المحاضرة الثانية

وان الشــرط الجوهري للتصغير هو اخذ التفاضل الجزئي لمجموع المربعات بالنســبة لمعــاملات، Coefficient، الــنموذج $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ ومساواة المشتقة الأولى بالصفر.

أي بتطبيق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 2\sum(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)(-1) = 0$$

$$-2\sum(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

بالقسمة على (2−) وفك القوس وترتيب المعادلة نحصل على:

$$\sum(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

$$\sum Y_i - n\hat{B}_0 - \hat{B}_1 \sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \qquad \ldots(14.2)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 2\sum(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)(-X_i) = 0$$

$$-2\sum X_i (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

بالقسمة على (2) نحصل على:

$$\sum X_i (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

$$\sum X_i Y_i - \hat{B}_0 \sum X_i - \hat{B}_1 \sum X_i^2 = 0$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2 \qquad \ldots(15.2)$$

تســمى المعادلتين (14.2) و(15.2) بالمعادلتين الطبيعيتين (الأنيتين) حيث (n) عدد المشــاهدات، X_i وY_i هي معلومة دائماً باعتبارهما قيم المشاهدات الحقيقية وبمجرد

وبتعويضهما في المعادلتين (14.2) و(15.2) وبحلهما آنياً نحصل على قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ اللتان تمثلان مقدرتان للمعلمتين الحقيقيتين B_0 و B_1.

1.3.2 طرق تقدير معاملات النموذج:

ولتقدير معاملات النموذج B_0 و B_1 نستعين بعدة طرق منها:

1- طريقة الحذف والتعويض.

2- طريقة المحددات.

3- طريقة التقدير حول نقطة المتوسط.

4- طريقة المصفوفات.

وسنبين هذه الطرق من خلال المثال الآتي، من دون تكرارها هنا وهناك.

مـثال 1.2: الجدول الآتي يمثل عدد سنوات الخدمة (X_i) ومعدل الأجر السنوي (Y_i) بآلاف الدنانير لعينة تمثل (8) موظفين في أحد الدوائر.

X_i	Y_i	$X_i Y_i$	X_i^2
4	25.6	102.4	16
8	32.7	261.6	64
12	45.4	544.8	144
16	53.9	862.4	256
20	59.0	1180	400
24	62.6	1502.4	576
28	65.0	1820	784
32	65.5	2105.6	1024
$\sum X_i = 144$ $\overline{X} = 18$	$\sum Y_i = 410$ $\overline{Y} = 51.25$	$\sum X_i Y_i = 8379.2$	$4\sum X_i^2 = 326$

المطلوب: تقدير خط الانحدار بواسطة المعادلتين الطبيعيتين أعلاه.

1.1.3.2 طريقة الحذف والتعويض، Substitution Method:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \qquad ...(16.2)$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2 \qquad ...(17.2)$$

وبتعويض القيم من الجدول في المعادلتين 16.2، 17.2 نحصل على:

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144\hat{B}_1 \qquad ...(18.2)$$

$$8379.2 = 144\hat{B}_0 + 3264\hat{B}_1 \qquad ...(19.2)$$

وبضرب المعادلة (18.2) في 18 نحصل:

$$7380 = 144\hat{B}_0 + 2592\hat{B}_1 \qquad ...(20.2)$$

$$8379.2 = 144\hat{B}_0 + 3264\hat{B}_1 \qquad ...(21.2)$$

وبطرح معادلة (20.2) من (21.2) نحصل:

$$999.2 = 672\hat{B}_1$$

$$\hat{B}_1 = \frac{999.2}{672} = 1.486904762$$

للحصـــول على قيمة $\hat{B}_0$ نعوض عن قيمة $\hat{B}_1$ في أحد المعادلتين الرئيستين ولتكن معادلة (18.2).

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144\hat{B}_1$$

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144(1.486904762)$$
$$410 = 8\hat{B}_0 + 214.1142857$$
$$410 - 214.1142857 = 8\hat{B}_0$$
$$195.8857143 = 8\hat{B}_0$$

$$\hat{B}_0 = \frac{195.8857143}{8} = 24.48571429$$

وعليه فان المعادلة المقدرة ، Estimated، للعلاقة بين عدد سنوات الخدمة X_i ومعدل الأجر السنوي Y_i للعينة المعنية تكون:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$
$$\hat{Y}_i = 24.48571429 + 1.486904762 X_i$$

تشـير المعادلـة التقديرية إلى وجود علاقة طردية بين المتغير التابع Y_i الذي يمثل معـدل الأجـر السنوي للموظف والمتغير المستقل X_i الذي يمثل عدد سنوات الخدمة فـبزيـادة خدمتـه الوظيفية بمقدار سنة واحدة يزداد معدل اجره السنوي بمقدار 1486 دينار.

2.1.3.2 طريقة المحددات، Determinates Method:

ويمكن الحصول على قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ باعتماد المحددات (قاعدة كرايمر) وذلك بإعادة كتابة المعادلتين الطبيعيتين (16.2) و(17.2) في صيغة مصفوفة وعلى النحو الآتي:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

ولتقدير $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ ينبغي تكوين المحددات الآتية:

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = (n)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i)$$

$$|A_0| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = (\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i Y_i)(\sum X_i)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix} = (n)(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|A_1|}{|D|} = \frac{n(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)}{n(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2}$$

$$\hat{B}_0 = \frac{|A_0|}{|D|} = \frac{(\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i Y_i)(\sum X_i)}{n(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2}$$

or

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}$$

بالـــرجوع إلى بيانات المثال (1.2) وباعتماد المحددات نحصل على قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 144 \\ 144 & 3264 \end{vmatrix}$$

$$|D| = (8)(3264) - (144)(144)$$

$$|D| = 26112 - 20736$$

$$|D| = 5376$$

$$|A_o| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 410 & 144 \\ 8379.2 & 3264 \end{vmatrix}$$

$$|A_o| = (410)(3264) - (144)(9379.2)$$

$$|A_o| = 1338240 - 1206604.8$$

$$|A_o| = 131635.2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 410 \\ 144 & 8379.2 \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = (8)(8379.2) - (410)(144)$$

$$|A_1| = 67033.6 - 59040$$

$$|A_1| = 7993.6$$

$$\hat{B}_0 = \frac{|A_0|}{|D|} = \frac{131635.2}{5376} = 24.48571429$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|A_1|}{|D|} = \frac{7993.6}{5376} = 1.486904762$$

وبذلك تكون المعادلة التقديرية:

$$\therefore \hat{Y}_i = 24.4857 + 1.486 X_i$$

2.3.2 الخواص الأساسية لمقدرات المربعات الصغرى:

في كل تقدير يتم الحصول عليه، هناك خصائص عدة مرغوب فيها لذلك التقدير، ومن هذه الخصائص خاصية أفضل مقدر خطي غير متحيز، Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)، فكل مقدر $(\hat{B})$ يمكن التعبير عنه كدالة خطية بالنسبة لمشاهدات المتغير التابع (Y)، اي ان:

$$\hat{B} = K_1 Y_1 + K_2 Y_2 + \dots\dots + K_n Y_n$$

حيث ان:

K_i، $(i=1,2,\dots,n)$ عبارة عن أوزان أو قيم ثابتة. ومن بين جميع المقدرات الخطية نبحث عن المقدرات غير المتحيزة، ونقصد بعدم التحيز هو ان يكون الفرق بين القيمة المتوقعة للمقدر وقيمة المعلمة الحقيقية يساوي صفر، أي:

$$E(\hat{B}) - B = 0$$

وأفضل مقدر هو ذلك المقدر الذي يكون تباينه حول الوسط الحسابي اقل مايمكن فإذا كان $\overset{*}{B}$، $\hat{B}$ مقدرات خطية غير متحيزة فان $\hat{B}$ أفضل مقدر اذا تحققت العلاقة الآتية:

$$\text{var}(\hat{B}) < \text{var}(\overset{*}{B})$$

وسوف نتناول أدناه هذه الخصائص بشيء من التفصيل:

1.2.3.2 الخاصية الخطية، Linearity Property:

مقدرات المربعات الصغرى خطية في المتغير التابع حيث نلاحظ ان تلك المقدرات يمكن وصفها في صورة دالة او ترتيب خطي من قيم المتغير Y، أي:

2.2.3.2 خاصية عدم التحيز، Unbiasedness Property:

تقصـــد بعـــدم التحيز هو ان يكون الفرق بين القيمة المتوقعة للمقدر $E(\hat{B})$ وقيمة المعلمة الحقيقية للمجتمع الإحصائي (B)، يساوي صفر، أي:

$$E(\hat{B}) - B = 0$$

بعبارة أخرى يعتبر المقدر غير متحيز إذا كان وسطها يساوي القيمة الحقيقية للمعلمة:

$$E(\hat{B}) = B$$

ولاثبات خاصية عدم التحيز بالنسبة $\hat{B}_1$ نتبع ما يلي:

$$\hat{B}_1 = \sum K_i Y_i$$ من خاصية الخطية

وباستحضار المعادلة:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

وبتعويض ذلك في أعلاه:

$$\hat{B}_1 = \sum K_i (B_0 + B_1 X_i + U_i)$$

وبفتح القوس نحصل:

$$\hat{B}_1 = B_0 \sum K_i + B_1 \sum K_i X_i + \sum K_i U_i \qquad ...(38.2)$$

وباستخدام شروط الأوزان فأن:

$$\sum K_i = 0$$

$$B_0 \sum K_i = 0$$

$$\sum K_i X_i = 1$$

وبتعويض ذلك في المعادلة (38.2)، نحصل:

$$\therefore \hat{B}_1 = B_1 + \sum K_i U_i \qquad ...(39.2)$$

وبأخذ توقع طرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}_1) = B_1 + \sum K_i E(U_i)$$

من فرضيات الخطأ العشوائي

$$\because E(U_i) = 0$$

$$\because E K_i E(U_i) = 0$$

$$\therefore E(\hat{B}_1) = B_1 \qquad ...(40.2)$$

ويعني ذلك ان $\hat{B}_1$ هو تقدير غير متحيز للقيمة الأصلية، B.

إثبات خاصية عدم التحيز لـــ $\hat{B}_0$:

وبـــنفس المنهجـــية يمكن البرهنة بأن $\hat{B}_0$ تعتبر مقدرة غير متحيزة للمعلمة الحقيقية B_0.

من الخاصية الخطية يتبين لنا:

$$\hat{B}_0 = \sum W_i Y_i$$

$$W_i = \left[\frac{1}{n} - \bar{X}K_i\right]$$

وان:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

وعند التعويض نحصل:

$$\therefore \hat{B}_0 = \sum\left[\frac{1}{n} - \bar{X}K_i\right]\left[B_0 + B_1 X_i + U_i\right]$$

وعند فك الأقواس والتعويض، نحصل:

$$\hat{B}_0 = B_0 - B_0\bar{X}\sum K_i + B_1\bar{X} - \bar{X}B_1\sum K_i X_i + \sum\left(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i\right)U_i \quad ....(41.2)$$

وباستخدام شروط الأوزان:

$$\because \sum K_i = 0$$

$$\therefore B_0\bar{X}\sum K_i = 0$$

$$\because \sum K_i X_i = 1$$

$$\therefore \hat{B}_0 = B_0 + \sum\left(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i\right)U_i \quad ...(42.2)$$

وبأخذ توقع طرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}_0) = B_0 + \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i)E(U_i)$$

$$\because E(U_i) = 0$$

$$\therefore \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i)E(U_i) = 0$$

$$\therefore E(\hat{B}_0) = B_0 \qquad \ldots(43.2)$$

ويعني ذلك ان $\hat{B}_0$ هو تقدير غير متحيز للقيمة الأصلية، B_0.

3.2.3.2 خاصية افضل مقدر (اقل تباين)، Best Minimum Variance:

ان مفهـــوم تبايـــن المعالم يُحدد بواسطة الانحراف بين المعالم المقدرة لـــ $\hat{B}$ وقيمتها المتوقعة $E(\hat{B})$.

فبالنسبة لــ $\hat{B}_1$ فان:

$$var(\hat{B}_1) = E[\hat{B}_1 - E(\hat{B}_1)]^2 \qquad \ldots(44.2)$$

$$\because E(\hat{B}_1) = B_1$$ من خاصية عدم التحيز

$$var(\hat{B}_1) = E[\hat{B}_1 - B_1]^2 \qquad \ldots(45.2)$$

بالرجـــــوع إلى المعادلة (39.2) من خاصية عدم التحيز والخاصة بـــ $\hat{B}_1$ نجد ان:

$$\hat{B}_1 = B_1 + \sum K_i U_i$$

$$\hat{B}_1 - B_1 = \sum K_i U_i$$

بتربيع الطرفين:

$$\left(\hat{B}_1-B_1\right)^2=\left(\sum K_i U_i\right)^2$$

وبأخذ توقع طرفي المعادلة:

$$E\left(\hat{B}_1-B_1\right)^2=E\left(\sum K_i U_i\right)^2$$

$$\operatorname{var}(\hat{B}_1)=E\left[\sum K_i U_i\right]^2 \qquad \ldots(46.2)$$

وبفك القوس، نحصل:

$$\operatorname{var}(\hat{B}_1)=\sum K_i^2 E(U_i)^2+2\sum_{i<j}\sum K_i K_j E(U_i U_j)$$

ومن فرضيات الخطأ العشوائي ان :

$$E(U_i)^2=\sigma^2$$

وان:

$$E(U_i U_j)=0 \qquad \text{For all } i\neq j .$$

$$\therefore \operatorname{var}(\hat{B}_1)=\sum K_i^2\ \sigma^2 \qquad \ldots(47.2)$$

$$\because K_i=\frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\sum K_i^2=\frac{\sum x_i^2}{(\sum x_i^2)^2}=\frac{1}{\sum x_i^2}$$

$$\therefore \operatorname{var}(\hat{B}_1)=\frac{1}{\sum x_i^2}.\sigma^2=\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

وبالأسلوب نفسه يمكن تحديد التباين لـــ $\hat{B}_0$ على النحو الآتي:

$$\text{var}(\hat{B}_0) = E\left[\hat{B}_0 - E(\hat{B}_0)\right]^2 \qquad \ldots(48.2)$$

من خاصية عدم التحيز:

$$\because E(\hat{B}_0) = B_0$$

$$\text{var}(\hat{B}_0) = E\left[\hat{B}_0 - B_0\right]^2$$

وبالـــرجـــــوع إلى المعادلة (42.2) من خاصية عدم التحيز والخاصة بـــ $\hat{B}_0$ نجد ان:

$$\hat{B}_0 = B_0 + \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i)U_i$$

$$\hat{B}_0 - B_0 = \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i)U_i$$

$$\text{var}(\hat{B}_0) = E\left[\sum(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i)U_i\right]^2$$

$$\text{var}(\hat{B}_0) = \sum(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i)^2 \; E(U_i)^2$$

$$\because E(U_i)^2 = \sigma^2$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_0) = \sigma^2\left[\sum(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i)^2\right]$$

وبفك القوس نحصل:

$$\text{var}(\hat{B}_0) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} - \frac{2\bar{X}^2}{n}\sum K_i + \bar{X}^2 \sum K_i^2\right)$$

وباستخدام شروط الأوزان:

$$\sum K_i = 0$$

$$\therefore \frac{2\bar{X}^2}{n}\sum K_i = 0$$

وان:

$$\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_0) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2}\right)$$

ولاثبات ان مقـدرات (OLS) هي افضل مقدرات خطية غير متحيزة أي أنها تتسم بالكفـاءة ، ونتيجة لنسبية معيار الأفضلية فأننا نقوم بتعريف مقدرة أخرى ولتكن $\overset{*}{B}_1$ تخـتلف عن مقدرة OLS، $\hat{B}_1$، حيث سيتضح لاحقاً ان تباين تلك المقدرة $\overset{*}{B}_1$ لابد وان يفـوق تبايـن مقـدرة OLS، $\hat{B}_1$، وبالتالي نفضل المقدرة الأخيرة $\hat{B}_1$ صاحبة التباين الأقل.

$$\overset{*}{B}_1 = \sum C_i Y_i \qquad \text{...(49.2)}$$

$$C_i = K_i + d_i$$

وان $d_i \neq 0$ ، حيث d_i كميات ثابتة.

$$\because Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

$$\overset{*}{B}_1 = \sum C_i (B_0 + B_1 X_i + U_i) \qquad \ldots(50.2)$$

$$\overset{*}{B}_1 = B_0 \sum C_i + B_1 \sum C_i X_i + \sum C_i U_i$$

ولكـــي تكـــون $\overset{*}{B}_1$ غـــير متحيزة أي $E(\overset{*}{B}_1) = B_1$ يجب ان تتصف C_i بالصفات الآتية:

$$a: \quad \sum C_i = 0$$

أو

$$\sum K_i + \sum d_i = 0$$

معروفة مسبقاً

$$\because \sum K_i = 0$$

$$\sum d_i = 0$$

أي إن:

$$\therefore \sum C_i = 0$$

$$b: \quad \sum C_i X_i = 1$$

او

$$\because \sum K_i X_i + \sum d_i X_i = 1$$

معروفة مسبقاً

$$\because \sum K_i X_i = 1$$

أي ان:

$$\sum d_i X_i = 0$$

$$\therefore \sum C X_i = 1 + 0 + 1$$

$$\overset{*}{B}_1 = B_1 + \sum C_i U_i \qquad \ldots(51.2)$$

$$E(\overset{*}{B}) = B_1 + \sum C_i E(U_i)$$

$$\because E(U_i) = 0$$

$$\therefore \sum C_i E(U_i) = 0$$

$$E(\overset{*}{B_1}) = B_1 \qquad \dots(52.2)$$

هــنا المقــدر $\overset{*}{B_1}$ غير متحيز ولتحديد تباين هذه المقدرة الخطية غير المتحيزة فأننا نعوض في قانون var.

$$\text{var } \overset{*}{B_1} = E\left[\overset{*}{B_1} - E(\overset{*}{B_1})\right]^2$$

من المعادلة رقم (52.2)

$$\because E(\overset{*}{B_1}) = B_1$$

$$\text{var } \overset{*}{B_1} = E\left[\overset{*}{B_1} - B_1\right]^2$$

وباستخدام المعادلة رقم (51.2)

$$\overset{*}{B_1} = B_1 + \sum C_i U_i$$

$$\overset{*}{B_1} - B_1 = \sum C_i U_i$$

$$\text{var } (\overset{*}{B_1}) = E\left[\sum C_i U_i\right]^2 \qquad \dots(53.2)$$

وبفك القوس، نحصل على:

$$\text{var}(\dot{B}_1) = \sum C_i^2 E(U_i)^2 + 2\sum_{i>j} C_i C_j E(U_i U_j)$$

ومن فرضيات الخطأ العشوائي:

$$E(U_i)^2 = \sigma^2$$

و ان

$$E(U_i U_j) = 0$$

$$\therefore \text{var}(\dot{B}_1) = \sum C_i^2 \sigma^2 \qquad \ldots(54.2)$$

ولما كانت

$$C_i = K_i + d_i$$

$$\text{var}(\dot{B}_1) = \sum (K_i + \sum d_i)^2 \sigma^2$$

$$\text{var}(\dot{B}_1) = \sigma^2 [\sum K_i^2 + \sum d_i^2 + 2\sum K_i d_i]$$

$$\text{var}(\dot{B}_1) = \sigma^2 \sum K_i^2 + \sigma^2 \sum d_i^2 + 2\sigma^2 \sum K_i d_i$$

$$\because \sum K_i = 0$$

$$\therefore \sum K_i d_i = 0$$

$$\text{var}(\dot{B}_1) = \sigma^2 \sum K_i^2 + \sigma^2 \sum d_i^2 \qquad \ldots(55.2)$$

و عند فك الأقواس، نحصل:

$$e_i^2 = y_i^2 + \hat{B}_1^2 x_i^2 - 2\hat{B}_1 x_i y_i$$

وبإدخال $\sum$ على طرفي المعادلة:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 + \hat{B}_1^2 \sum x_i^2 - 2\hat{B}_1 \sum x_i y_i \qquad \ldots(61.2)$$

$$\because \hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

وان حاصل ضرب الطرفين في الوسطين لذلك سيكون:

$$\hat{B}_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

وبالتعويض في المعادلة (61.2) بما يساويها:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 + \hat{B}_1 \sum x_i y_i - 2\hat{B}_1 \sum x_i y_i$$

وبعد الاختصار نحصل:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{B}_1 \sum x_i y_i \qquad \ldots(62.2)$$

وقد جرى تعريف σ^2 على أنها:

$$\sigma^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

وبالتعويض عن البسط من المعادلة 62.2 ، نحصل:

$$\sigma^2 = \frac{\sum y_i^2 - \hat{B}_1 \sum x_i y_i}{n-2} \qquad \ldots(63.2)$$

وهـــذا يعنـــي ان تباين أخطاء العينة تمثل النسبة بين مجموع مربعات انحرافات القيم المشاهدة عن خط انحدار العينة إلى درجة الحرية للخطأ.

وإذا رمزنا إلى التقدير الخطي غير المتحيز لتباين الخطأ بالرمز (S_e^2)، فأن:

$$S_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

ذلك يعني أن S_e^2 افضل مقدر غير متحيز لتباين المتغير العشوائي أو حد الخطأ، u_i.