$$\frac{\partial S}{\partial \hat{B}_1} = 2\sum (y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2})(-x_{i1}) = 0$$

$$= \sum (y_i x_{i1} - \hat{B}_0 x_{i1} - \hat{B}_1 x_{i1}^2 - \hat{B}_2 x_{i1} x_{i2}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum x_{i1} y_i = \sum \hat{B}_0 x_{i1} + \sum \hat{B}_1 x_{i1}^2 + \sum \hat{B}_2 x_{i1} x_{i2}} \quad - (2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{B}_2} = 2\sum (y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2})(-x_{i2}) = 0$$

$$\sum (y_i x_{i2} - \hat{B}_0 x_{i2} - \hat{B}_1 x_{i1} x_{i2} - \hat{B}_2 x_{i2}^2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum y_i x_{i2} = \hat{B}_0 \sum x_{i2} + \hat{B}_1 \sum x_{i1} x_{i2} + \hat{B}_2 \sum x_{i2}^2} \quad - (3)$$

نلاحظ أننا تحصلنا على ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل ($\hat{B}_0, \hat{B}_1, \hat{B}_2$)
سوف نستخدم طريقة المحددات لحل هذه الجملة

$$\begin{cases} \hat{B}_0 n + \hat{B}_1 \sum x_{i2} + \hat{B}_2 \sum x_{i2} = \sum y_i \\ \hat{B}_0 \sum x_{i1} + \hat{B}_1 \sum x_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum x_{i1} x_{i2} = \sum y_i x_{i1} \\ \hat{B}_0 \sum x_{i2} + \hat{B}_1 \sum x_{i1} x_{i2} + \hat{B}_2 \sum x_{i2}^2 = \sum y_i x_{i2} \end{cases}$$

لدينا (نعرف)

$$D = \begin{vmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1} x_{i2} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i1} x_{i2} & \sum x_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

معاملات $\hat{B}_0$ معاملات $\hat{B}_1$ معاملات $\hat{B}_2$

• نستعمل D_0 لحساب B_0 لذلك
نعوض معاملات $\hat{\beta}_0$ في D بمعاملات C

$$D_0 = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} \\ \sum x_{i1} Y_i & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1} x_{i2} \\ \sum x_{i2} Y_i & \sum x_{i1} x_{i2} & \sum x_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

• نستعمل D_1 لحساب $\hat{\beta}_1$ لذلك
نعوض معاملات $\hat{\beta}_1$ في D بمعاملات C

$$D_1 = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum x_{i2} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1} Y_i & \sum x_{i1} x_{i2} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i2} Y_i & \sum x_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

• نستعمل D_2 لحساب $\hat{\beta}_2$ لذلك
نعوض معاملات $\hat{\beta}_2$ في D
بمعاملات C.

$$D_2 = \begin{vmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum Y_i \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum Y_i x_{i1} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i1} x_{i2} & \sum Y_i x_{i2} \end{vmatrix}$$

ومنه يكون

كما يمكن حساب $\hat{\beta}_0$ من العلاقة $\left(\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2\right)$

$$\beta_0 = \frac{|D_0|}{|D|} \qquad \beta_1 = \frac{|D_1|}{|D|}$$

$$\beta_2 = \frac{|D_2|}{|D|}$$

وبصفة عامة يمكن تقدير المعالم $(\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_k)$ بعطى بالعلاقة التالية

$$\boxed{\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y}$$

حيث

$$(X'X)^{-1} = \frac{adj(X'X)}{det(X'X)} \quad \text{مع} \quad adj(X'X) = Com(X'X)'$$