المقــدرة وبــالعكس في حالة كون (F) المحتسبة اقل من قيمتها الجدولية حيث تقبل فرضية العدم أي عدم معنوية العلاقة المقدرة او عدم معنوية معادلة الانحدار.

ويمكن احتساب قيمة F بالاعتماد على الصيغ الآتية:

$$F = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1} \qquad \ldots(6.3)$$

أو

$$F = \frac{R^2 / k}{1 - R^2 / n - k - 1}$$

أو

$$F = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 / k}{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 / n - k - 1}$$

أو

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$$

أو

$$F = t_{\hat{B}_1}^2$$

العلاقة بين إحصائية F و t:

ويُمكن توضيح العلاقة بين إحصائي F و t في نموذج المتغيرين كالآتي:

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1} \qquad \ldots(7.3)$$

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2}{\sum e_i^2 / n - 2}$$

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2}{\sigma^2}$$

$$F = \frac{\hat{B}_1^2}{\sigma^2 / \sum x_i^2}$$

$$\because \sigma^2 / \sum x_i^2 = \operatorname{var}(\hat{B}_1) = S_{\hat{B}_1}^2$$

$$\therefore F = \frac{\hat{B}_1^2}{S_{\hat{B}_1}^2} = \left(\frac{\hat{B}_1}{S\hat{B}_1}\right)^2 = t_{\hat{B}_1}^2 \qquad \ldots(8.3)$$

ولاختــبار جوهــرية العلاقة بين المتغير التابع، Y، والمتغير المستقل، X، نعود إلى مثالنا (1.2)، وبالاعتماد على الصيغ الرياضية الخاصة بـــ F نحصل على:

$$F = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$$

$$F = \frac{1485.715238/1}{147.204762/8-1-1} = \frac{1485.715238}{24.534127} = 60.55708597$$

وبما ان قيمة (F) المحتسبة والبالغة (60.55) اكبر من قيمة (F) الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (1، 6) للبسط والمقام والبالغة (5.99)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل أي معنوية او جوهرية العلاقة المقدرة.

or:

$$F = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i / k}{\sum e_i^2 / n-k-1}$$

$$= \frac{(1.486904762)(999.2)/1}{24.534127} = \frac{1485.715238}{24.534127} = 60.5570$$

or:

$$F = \frac{R^2 / k}{1 - R^2 / n-k-1}$$

$$= \frac{0.909851822/1}{1 - 0.909851822/8-1-1} = \frac{0.909851822}{0.015024696} = 60.5570$$

r:

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n-k-1}$$

$$= \frac{(1.486904762)^2 (672)/1}{24.534127} = \frac{(2.210885771)(672)}{24.534127}$$

$$= \frac{1485.715238}{24.534127} = 60.5570$$

or:

$$F = t_{\hat{B}_1}^2$$

$$= (7.781843354)^2 = 60.5570$$

5.3 معامـــل الارتبـــاط البسيط، r، Simple Correlation Coefficient:

يقصـــد بالارتباط وجود علاقة بين ظاهرتين أو اكثر، ويسمى المقياس الذي تُقاس به درجة الارتباط بمعامل الارتباط والذي يرمز له بالرمز (r). حيث ان تحليل الارتـــباط يعامل أي متغيرين بشكل متماثل، Symmetrically، ولا يوجد تمييز بين المتغـــير الـــتابع والمتغـــير أو المتغيرات المستقلة. تأسيساً على ذلك يفترض تحليل الارتـــباط ان كلا المتغيرين عشوائي، Random، أو تصادفي، Stochastic، وهذا يتطلب احتمالية التوزيع الطبيعي. ويمكن حسابه على النحو الآتي:

$$r = \left[\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}}\right]\hat{B}_1 \qquad \ldots(9.3)$$

أو

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}}$$

أو

$$r = \mp\sqrt{R^2}$$

$\mp$: تعتمد على إشارة $\hat{B}_1$.

أو

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{n S_X S_Y}$$

حيث ان:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \ , \ S_Y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}} \ ,$$

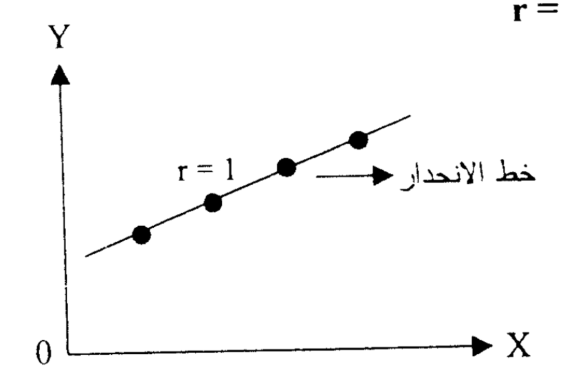
وتتراوح قيمة r بين 1+ ، 1- اي ان:

$$-1 \le r \le +1$$

وقـــد يكون الارتباط بين ظاهرتين أو اكثر موجباً أو سالباً والإشارة تدل على وجود علاقة طردية أو عكسية ولا تدل على قوة العلاقة التي تحدد من خلال الأرقام. ويمكن التمييز بين الخصائص الآتية:

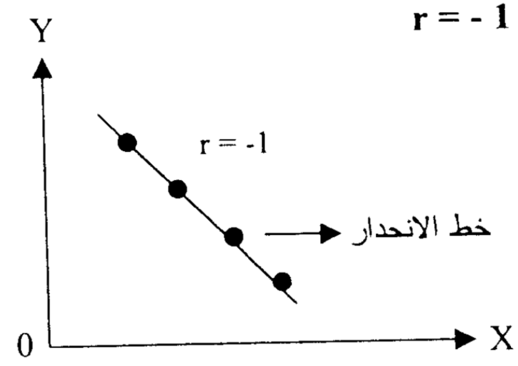
أ- عندما تكون r = 1 ، معنى ذلك وجود علاقة خطية تامة وموجبة بين المتغيرين X ، Y، اي ان الزيادة في قيمة المتغير X يترتب عليه زيادة في قيمة المتغير التابع Y.

شكل 2.3: r = 1



ب- عندما $r = -1$، معنى ذلك وجود علاقة خطية تامة وسالبة بين المتغيرين X، Y أي ان الزيادة في قيمة المتغير المستقل X يترتب عليه انخفاض في قيمة المتغير التابع Y.

شكل 3.3: $r = -1$



ج- عندما $r = 0$، معنى ذلك ليست هناك علاقة بين المتغيرين X، Y، في هذه الحالة ان تقدير المعامل B بطريقة المربعات الصغرى العادية، OLS، يكون مساوياً للصفر. ويشير ذلك ان متوسط التغيرات في المتغير المستقل ليس لها تأثير على المتغير التابع. في مثل هذه الظروف فان معامل الارتباط يكون مساوياً للصفر، ذلك لأن الانحدار يوضح عدم وجود تباين أو انحراف في المتغير التابع، بمعنى آخر:

$$\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 = 0$$

حيث ان متوسط قيمة Y دائماً تكون مساوية للقيمة المحسوبة، Calculated value، من معادلة الانحدار:

$$\sum(Y_i - \hat{Y})^2 = \sum(Y_i - \overline{Y})^2$$

حيث ان: $\hat{Y}_i = \overline{Y}$.

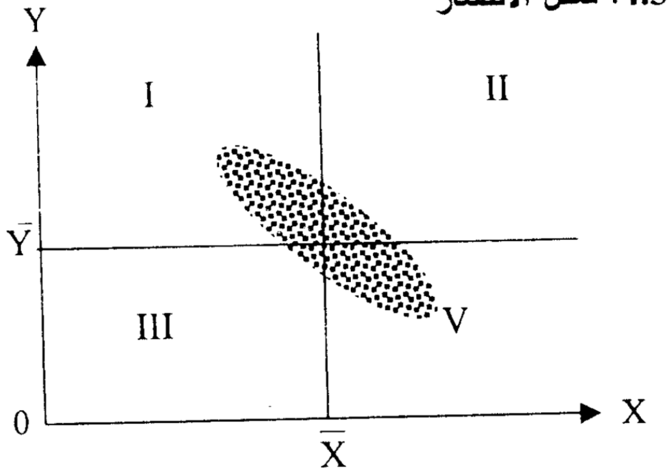
وبالتالي فان معادلة معامل التحديد البسيط r^2 يجب ان تساوي صفر، اي ان:

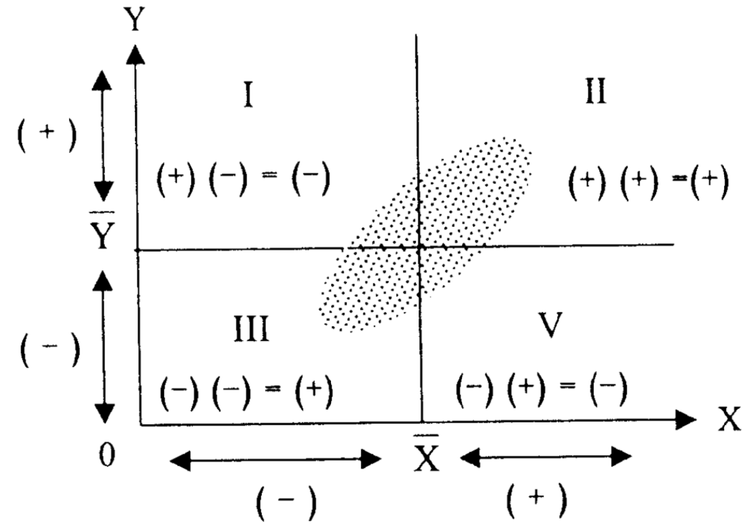
$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$$

يعني ذلك ان معامل الارتباط البسيط r ، يجب ان يساوي صفراً أيضاً.

ويمكن توضيح الارتباط بين متغيرين X، Y من خلال الشكل الانتشاري التالي الذي يعطي مؤشراً على قوة او ضعف الارتباط بين المتغير التابع Y، والمتغير المستقل X، وكما يأتي:

الشكل 4.3: شكل الانتشار





يبين الشكل أعلاه، انه عندما يكون انتشار المشاهدات قريبة جداً من خط الانحدار يدل علـــى قوة العلاقة بين المتغيرين X، Y. أما عندما تكون المشاهدات متباعدة عن خط الانحـــدار يدل ذلك على ضعف العلاقة أو الارتباط بين المتغيرين. ولذلك فان الشكل الانتشاري لا يعطي إلا فقط صورة مبسطة وأولية عن طبيعة العلاقة، فضلاً عن ذلك يمكن ملاحظة ما يأتي:

- فـــي المربعيـــن الثاني والثالث، تكون قيمة معامل الارتباط، r، موجبة وذلك لان معظم المشاهدات تتجمع في هذين المربعين، اي ان (X_iY_i) لها الإشارة نفسها.
- في المربعين الأول والرابع، تكون قيمة معامل الارتباط، r، سالبة وذلك لان معظم المشـــاهدات تتجمع في هذين المربعين أي ان X_i لها إشارة معاكسة لانحرافات Y_i.
- تقـــترب قـــيمة معـــامل الارتـــباط من الصفر، عندما يكون مجموع الانحرافات للمتغيريـــن X، Y عـــن وســـطها الحسابي تقترب من الصفر، أي عندما تنتشر

المشـــاهدات علـــى جميع أرباع الشكل، ويعني ذلك عدم وجود علاقة خطية بين المتغيرين.

- تكون قيمة معامل الارتباط (r) موجبة، عندما يكون مجموع انحرافات المتغيرين عن وسطها الحسابي موجب.
- تكون قيمة معامل الارتباط، r، سالبة عندما يكون مجموع انحرافات المتغيرين عن وسطها الحسابي سالباً.

باختصار، يمكن توضيح العلاقات أعلاه في الصيغة الآتية:

أ- عندما:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \sum x_i y_i > 0$$

معنى ذلك ان معامل الارتباط يكون موجباً.

ب- عندما:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \sum x_i y_i < 0$$

معنى ذلك ان معامل الارتباط يكون سالباً.

ويظهر من ذلك ان مجموع حاصل ضرب الانحرافات $(\sum x_i y_i)$يتأثر بعدد المشـــاهدات، أي انه كلما زاد عدد المشاهدات، كلما كان الارتباط بين X، Y موجباً وقويـــاً. ومعنى ذلك انه في حالة زيادة عدد المشاهدات للعينة يصبح معامل الارتباط أقوى، ولكنه يختلف عن مقياس آخر للظاهرة نفسها.

وبذلـــك فان مجموع حاصل ضرب الانحرافات $(\sum x_i y_i)$ لا يعتبر مقياساً ملائمـــاً لتبـــيان قـــوة العلاقة بين المتغيرين، وذلك لان المقياس يتأثر بوحدة القياس كالأمـــتار واللـــترات والديـــنار وغيرها. وبذلك لا تصلح للمقارنة في حالة اختلاف

وحـــدات القياس. ولكي نحصل على مقياس يبين قوة العلاقة، ويكون صالحاً لأجراء المقارنة نحتاج إلى معاملات لا تتأثر قيمتها بوحدات القياس المستخدمة. وهذا العامل يمكـــن الحصـــول عليه بقسمة مجموع الانحرافات ($\sum x_i y_i$) على عدد المشاهدات (n)، أي ان:

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n}$$

ويســمى هذا بالتباين المشترك، Covariance، ولكن الناتج ما يزال يتأثر بالعامل y_i ، هو وحدات القياس للمتغيرين، ولهذا يمكن تصحيح هذا التأثير بقسمة التباين المشترك على الانحراف المعياري لكل من X، Y أي Se_x، Se_y على التوالي. ويمكن اعتماد هذا المقياس للوصول إلى تحديد قيمة معامل الارتباط البسيط.

مـــثال 4.3: وبالرجوع إلى البيانات الخاصة بالمثال (1.2) وباعتماد الصيغ الرياضية المذكورة أعلاه يمكن حساب معامل الارتباط (r) على النحو الآتي:

$$r = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}} \,.\, \hat{B}_1$$

$$= \sqrt{\frac{672}{1632.92}} \;.\; (1.486904762)$$

$$= (0.641508156)\,(1.486904762) = 0.953861532$$

إذن العلاقة بين المتغيرين X و Y طرديه.

or

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}.}$$

$$= \frac{999.2}{\sqrt{(672)(1632.92)}.} = \frac{999.2}{(25.92296279)(40.40940485)}$$

$$= \frac{999.2}{1047.5314978} = 0.9538$$

or

$$r = \mp\sqrt{R^2} = \sqrt{0.909851822} = 0.9538$$

or

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{nS_X S_Y}$$

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{672}{8}} = 9.16515139$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{1632.92}{8}} = 14.2868821$$

$$r = \frac{999.2}{(8)(9.16515139)(14.2868821)} = \frac{999.2}{1047.531498} = 0.9538$$