6.3 حـــدود الثقـــة لمعاملات الانحـــدار:

نعنـــي بحـــدود أو فترات الثقة لمعاملات الانحدار، تقدير مدى الثقة التي تقع ضـــمنها القـــيمة الحقيقـــية للمعلمة أي معلمة المجتمع. ويراد بحدي الثقة الحد الأدنى Lower Limit الذي يرمز له بالرمز (L) والحد الأعلى Upper Limit الذي يرمز لـــه بالرمز (U). ويعني ذلك تحديد مدى تتراوح فيه قيمة B بين هذه الحدين. بمعنى آخـــر يمكـــن القول إلى أي مدى ممكن تحريك توزيع t إلى اليسار أو اليمين قبل ان تصـــل إلى القيمة الحرجة، Critical Value. والصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي:

(الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة) $(t\alpha/2) \mp$ المعلمة المقدرة = معلمة المجتمع

تتراوح قيمة معامل الثقة بين 90%، 100%. كما ان مستوى المعنوية هو احتمال مكمل لمعامل الثقة، هذا يعني ان حاصل جمع معامل الثقة ومستوى المعنوية يساوي 1. وإذا كان معامل الثقة 95%، فان مستوى المعنوية يكون 5% وهكذا. وبناء على ما جاء أعلاه، يمكن تعريف فترة الثقة بأنها "الفترة التي توجد فيها القيمة الفعلية لـــ B_1 بين حد أدنى وأعلى وباحتمال معين".

مـــثال **5.3**: ولتوضيح كيفية احتساب حدود الثقة نعود إلى بيانات المثال (1.2)، حيث ان (t) الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) تساوي (2.45)، لذا فان معامل الثقة هو 95%.

فبالنسبة إلى B_1. فان:

$$B_1 = \hat{B}_1 \mp (t\alpha/2)(S\hat{B}_1)$$
$$B_1 = 1.486904762 \mp (2.45)(0.191073592)$$
$$B_1 = 1.486904762 \mp 0.4681303$$

$$1.018774462 < B_1 < 1.955035062$$

هـــذا يعنـــي ان هناك احتمال 95% ان تكون قيمة $\hat{B}_1$ مساوية لـــ B_1 الحقيقية بين الحدين الأعلى 1.955 والأدنى 1.018 وان هناك احتمال 5% ان لا تكون كذلك.

أما بالنسبة لـــ B_0 فإن:

$$B_0 = \hat{B}_0 \mp (t\alpha/2)(S\hat{B}_0)$$
$$B_0 = 24.48571429 \mp (2.45)(3.859497372)$$
$$B_0 = 24.48571429 \mp 9.455768561$$
$$15.02994573 < B_0 < 33.94148285$$

هـــذا يعنـــي ان هناك احتمال 95% ان تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع B_0 بين الحدين الأعلى 33.941 والأدنى 15.029 وان هناك احتمال 5% ان تقع خارج هذين الحدين.

وقد جرى استخدام مستوى الثقة 95% في الدراسات الاقتصادية ويعني ذلك ان 95% من الحالات تقع ضمن فترة الثقة، وان 5% من الحالات تقع خارج هذه الفترة. بمعنى اخر إذا كانت $B_0=0.05$ فأن احتمال B_1 ان توجد بين الحدين 95%.

جـــدول تحليـــل التبايـــن:

يهـــدف جدول تحليل التباين، ANOVA Table، إلى توضيح تأثير المتغير المســـتقل فـــي المتغير التابع. وتزداد أهمية هذا الجدول عند دراسة الانحدار المتعدد حيث يستفاد منه في معرفة تأثير كل متغير من المتغيرات المستقلة في المتغير التابع وبالتالي اعتماد المتغيرات المؤثرة في النموذج.

ويمكن بناء جدول تحليل التباين في ضوء المعلومات التفصيلية أدناه:

جــدول تحليــل التبايــن

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	F
الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار أي بواسطة المتغير المستقل X_1	$\sum \hat{y}_i^2 = \hat{B}_1 \sum x_i y_i$	k	$\sum \hat{y}_i^2 / k$	$F = \dfrac{\sum \hat{y}_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n-k-1}$
الانحرافات غير الموضحة	$\sum e_i^2$	n-k-1	$\sum e_i^2 / n-k-1$	
الانحرافات الكلية	$\sum y_i^2$	n − 1		

، يمكــن بــناء جــدول تحليل التباين لمثالنا بعد ان تم تطبيق جميع الاختبارات عليه كالآتي:

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	F
الانحرافات الموضحة من قبل X_1	**1485.715238**	**1**	**1485.715238/1**	$F = \dfrac{1485.715238/1}{147.204762/6} = 60.55708597$
الانحرافات غير الموضحة	**147.204762**	**8-1-1=6**	**147.204762/6**	
الانحرافات الكلية	**1632.92**	**7**		

7.3 التنبــــؤ، Forecasting:

أحـــــد الأهداف الرئيسة لتطبيق بحث الاقتصاد القياسي هو استخدام النموذج المقــدر للتنـــبؤ بقـــيمة المتغيرات التابعة استناداً إلى قيم المتغيرات المستقلة من أجل الــتعرف علـــى مسار الظاهرة موضوع البحث في المستقبل، حيث يعرف التنبؤ بأنه تحلـــيل بـــيانات الماضــــي وتطبيق نتائجها على المستقبل من خلال استخدام نموذج رياضي مناسب. أي ان $(\hat{Y}_i)$ يمكن ان تستخدم في التنبؤ بقيمة (Y_i) الجديدة ولتكن (Y_{t+1}) في حالة الاعتماد على قيمة (X_i) الجديدة ولتكن (X_{t+1}).

وللتنبؤ أخطاء وقد ينشأ بسبب:

- خطأ التقدير $Y_{t+1} - E(Y_{t+1})$
- خطأ المعاينة $E(Y_{t+1}) - YP_{t+1}$

وعلـــيه فـــان الخطأ الحاصل في التنبؤ عن قيمة المفردة الواحدة هو مجموع نوعين من الانحراف أي:

$$Y_{t+1} - YP_{t+1} = [Y_{t+1} - E(Y_{t+1})] + [E(Y_{t+1}) - YP_{t+1}]$$

ولأغـــراض التنبؤ نفترض أن القيمة المراد التنبؤ بها، تقع خارج قيم (X_i) المشمولة بالعيـــنة أي ان المحاولـــة الجديـــدة تكون مستقلة عن القيم التي استخدمت في تحليل الانحدار، حيث ان معادلة الخط المستقيم الحقيقية هي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \qquad \dots(10.3)$$

المعادلة التقديرية لها:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \qquad \dots(11.3)$$

المعادلة الحقيقية في الفترة t+1 هي:

$$Y_{t+1} = B_0 + B_1 X_{t+1} + U_{t+1} \qquad \dots(12.3)$$

فالمعادلة التنبؤية في الفترة t+1 تكون:

$$YP_{t+1} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1} \qquad \dots(13.3)$$

عليه فأن خطأ التنبؤ يكون:

$$Y_{t+1} - YP_{t+1} = B_0 + B_1 X_{t+1} + U_{t+1} - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{t+1} \qquad \dots(14.3)$$

ان مقـــدرات (OLS) هـــي أفضل مقدرات خطية غير متحيزة وان خطأ التنبؤ يعتم علـــى عنصـــر الخطـــأ العشوائي، أي (U_{t+1}). ونفترض ان قيمة الخطأ العشوائي (U_{t+1}) مستقلة عن القيم $U_1, U_2, \dots, U_n$ وأنها تتوزع توزيعاً طبيعياً، كذلك وا خطـــأ التنـــبؤ يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي يساوي صفر وتباين ثابت. ويمكن إثبات ذلك كالآتي:

أولاً: الوسط الحسابي المساوي للصفر:

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = E(B_0 + B_1 X_{t+1} + U_{t+1}) - E(\hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1})$$
$$= B_0 + B_1 X_{t+1} + E(U_{t+1}) - E(\hat{B}_0) - E(\hat{B}_1) X_{t+1}$$

$$\because E(\hat{B}_0) = B_0 \quad , E(\hat{B}_1) = \hat{B}_1$$

$$\therefore E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = B_0 + B_1 X_{t+1} + E(U_{t+1}) - B_0 - B_1 X_{t+1}$$

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = E(U_{t+1})$$

ولما كانت:

$$E(U_{t+1}) = 0$$

فإن:

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = 0$$

ثانياً: تبايـن خطـأ التنبـؤ:

$$\sigma^2 P = E[(Y_{t+1} - YP_{t+1}) - E(Y_{t+1} - YP_{t+1})]^2$$

وبما ان خطأ التنبؤ وسطه الحسابي يساوي صفر، أي ان:

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = 0$$

$$\therefore \sigma^2 P = E[(Y_{t+1} - YP_{t+1})]^2$$

$$\sigma^2 P = E[(B_0 + B_1 X_{t+1} + U_{t+1} - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{t+1}]^2$$

$$\sigma^2 P = E[U_{t+1} + \{(B_0 - \hat{B}_0) + X_{t+1}(B_1 - \hat{B}_1)\}]^2$$

$$\sigma^2 P = EU_{t+1}^2 + 2\{(B_0 - \hat{B}_0) + X_{t+1}(B_1 - \hat{B}_1)\}EU_{t+1} + E\{(B_0 - \hat{B}_0) + X_{t+1}(B_1 - \hat{B}_1)\}^2$$

لما كانت:

$$EU_{t+1} = 0$$

ن الحد الثاني بكامله يساوي الصفر:

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + E(B_0 - \hat{B}_0)^2 + 2X_{t+1} E(B_0 - \hat{B}_0)(B_1 - \hat{B}_1) + X_{t+1}^2 E(B_1 - \hat{B}_1)^2$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + var(\hat{B}_0) + X_{t+1}^2 var(\hat{B}_1) + 2X_{t+1} cov(B_0 B_1)$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2}\right] + X_{t+1}^2\left[\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\right] - 2X_{t+1}\overline{X}\left[\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \left[\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2\overline{X}^2}{\sum x_i^2}\right] + X_{t+1}^2\left[\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\right] - 2X_{t+1}\overline{X}\left[\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\right]$$

وبضرب الجزء الأول من الحد الثاني وتقسيمه على $\sum x_i^2$:

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n\sum x_i^2} + \frac{\sigma^2\overline{X}^2}{\sum x_i^2} + X_{t+1}^2\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} - 2X_{t+1}\overline{X}\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\left[\frac{\sum x_i^2}{n} + \overline{X}^2 + X_{t+1}^2 - 2X_{t+1}\overline{X}\right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\left[\frac{\sum x_i^2}{n} + (X_{t+1} - \overline{X})^2\right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \left[\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n\sum x_i^2} + \frac{\sigma^2(X_{t+1} - \overline{X})^2}{\sum x_i^2}\right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \left[\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2 (X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2}\right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2}\right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2}\right]$$

وإذا رمزنا لتباين خطأ التنبؤ بالرمز S^2P فإن معادلة تقدير تباين خطأ التنبؤ تكون:

$$S^2 P = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - X)^2}{\sum x_i^2}\right]$$

وعليه فإن:

$$(Y_{t+1} - YP_{t+1}) \sim N(0, S^2 P)$$

وبعبارة أخرى ان:

خطأ التنبؤ $(Y_{t+1} - YP_{t+1})$ يتوزع، ~، توزيعاً طبيعياً، N، بوسط حسابي مساوي للصفر وتباين ثابت مقداره S^2P .

أما اختبار (t) فيتم بموجب:

$$\sigma^2 U = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

$$S^2 YP_{t+1} = \sigma^2 u \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2}\right]$$

$$SYP_{t+1} = \sqrt{S^2 YP_{t+1}}$$

$$t = \frac{YP_{t+1}}{SYP_{t+1}}$$

أما حدود الثقة فهي:

$$Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (t\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

ويتم إيجاد YP_{t+1} من خلال:

$$YP_{t+1} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1}$$

ترجع إلى البيانات الاحصائية الخاصة بمثالنا (1.2) ومنها:

$$\hat{Y}_i = 24.48571429 + 1.486904762 X_i$$

وللتنبؤ بقيمة YP_{t+1} عندما $X_{t+1} = 36$ فإن:

$$YP_{t+1} = 24.48571429 + 1.486904762(36)$$

$$= 78.01428572$$

ألف دينار معدل الأجر السنوي لموظف له من الخدمة 36 سنة.

ولتقدير حدود ثقة 95% للمعلمة Y_{t+1} فإن:

$$Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (t\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

وللحصول على SYP_{t+1} فإن:

$$\sigma^2 U = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{147.204762}{8-2} = 24.534127$$

$$S^2 YP_{t+1} = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \overline{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$= 24.534127 \left[1 + \frac{1}{8} + \frac{(36-18)^2}{672} \right]$$

$$= 24.54127 \left[1 + 0.125 + \frac{324}{672} \right]$$

$$= 24.534127 [1 + 0.125 + 0.482142857]$$

$$= 24.534127\ [1.607142857]$$

$$= 39.42984696$$

$$SYP_{t+1} = \sqrt{S^2 YP_{t+1}} = \sqrt{39.42984696} = 6.279318989$$

$$\therefore Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (t\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

$$Y_{t+1} = 78.01428572 \mp (2.45)(6.279318989)$$

$$Y_{t+1} = 78.01428572 \mp 15.38433152$$

$$62.6299542 < Y_{t+1} < 93.39861724$$

مثال شامل: في ضوء المجاميع الآتية التي تمثل العلاقة بين الكمية المطلوبة من س
ما (Y_i) وسعرها (X_i) مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة:

$$= 8\ ,\ \sum Y_i = 32\ ,\ \sum X_i = 24\ ,\ \sum X_i Y_i = 86$$

$$\sum X_i^2 = 96\ ,\ \sum Y_i^2 = 140$$

المطلوب:

1- احتساب معلمات العلاقة بطريقة المعادلات الطبيعية ، المحددات، الانحرافات المصفوفات.

2- اختبار معنوية المعالم المقدرة عند مستوى معنوية 5% إذا علمت ان (t) الجدول عند مستوى المعنوية المذكور ودرجة حرية (6) هي 2.31.

3- كون حدود ثقة 95% لكل من B_0 ، B_1.

4- وضح مقدار ما يفسره المتغير المستقل من التغير في المتغير التابع.

5- أوجد معامل ارتباط X_i و Y_i .

6- أختبر معنوية المعادلة المقدرة إذا علمت ان قيمة F الجدولية عند مستوى معنوي 5% ودرجة حرية (1، 6) للبسط والمقام تساوي 5.99.

7- حلل تباين المعالم باستخدام جدول ANOVA.

8- تنبأ بقيمة YP_{t+1} واحسب فترة ثقة 95% للمعلمة Y_{t+1} عند $X_{t+1} = 10$.

الحـل:

1- احتساب معلمات العلاقة:

*** بطريقة المعادلات الطبيعية:**

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \qquad \dots(15.3)$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2 \qquad \ldots(16.3)$$

$$32 = 8\hat{B}_0 + 24\hat{B}_1 \qquad \ldots(17.3)$$

$$86 = 24\hat{B}_0 + 96\hat{B}_1 \qquad \ldots(18.3)$$

وبضرب المعادلة (17.3) في (3) نحصل على:

$$96 = 24\hat{B}_0 + 72\hat{B}_1$$
$$86 = 24\hat{B}_0 + 96\hat{B}_1$$

بالطرح نحصل:

$$10 = -24\hat{B}_1$$

$$\hat{B}_1 = \frac{10}{-24} = -0.416$$

وللحصول على قيمة $\hat{B}_0$ يتم تعويض قيمة $\hat{B}_1$ في أحد المعادلتين الأساسيتين ولتكن معادلة (3).

$$32 = 8\hat{B}_0 + 24\hat{B}_1$$
$$32 = 8\hat{B}_0 + 24(-0.416)$$
$$32 = 8\hat{B}_0 - 9.984$$
$$32 + 9.984 = 8\hat{B}_0$$
$$41.984 = 8\hat{B}_0$$

$$\hat{B}_0 = \frac{41.984}{8} = 5.248$$

$$\therefore \hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

$$\hat{Y}_i = 5.248 - 0.416X_i$$

تشير المعادلة التقديرية إلى وجود علاقة عكسية بين المتغير المستقل X_i الذي يم
السعر والمتغير التابع Y_i الذي يمثل الكمية المطلوبة فكل زيادة في السعر X_i بمقد
وحدة واحدة سوف تؤدي إلى انخفاض الكمية المطلوبة بمقدار 0.416 وحدة.

*** طريقة المحددات:**

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32 \\ 86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 96 \end{bmatrix} = (8)(96) - (24)(24) = 768 - 576 = 192$$

$$|N_0| = \begin{bmatrix} 32 & 24 \\ 86 & 96 \end{bmatrix} = (32)(96) - (24)(86) = 3072 - 2064 = 1008$$

$$|N_1| = \begin{bmatrix} 8 & 32 \\ 24 & 86 \end{bmatrix} = (8)(86) - (32)(24) = 688 - 768 = -80$$