كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

الرياضيات -2- — السلسلة رقم-04-

# جملة معادلات خطية

## التمرين1:

حل الجملة الخطية باستعمال مقلوب المصفوفة:

تـــكون الجملة جملة قابلة للحل بطريقة المقلوب إذا كانت المصفوفة A المرافقة للجملة مربعة و محددها غير معدوم

$$\begin{cases} 2x+6y+z=3 \\ 3x+2y+4z=2 \\ 4x+y=1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$

1. أولا نقوم بكتابة الجملة الخطية على شكل كتابة مصفوفيه أي:

$$AX=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

حيث :

$$\underbrace{A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{مصفوفة المعاملات}}, \quad \underbrace{X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{العناصر x, y, z تسمى المجاهيل}}, \quad \underbrace{B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{العناصر 1، 2، 3 تسمى المقادير الحرة او الثابتة}}$$

2. حساب المحدد

بطريقة سايري *(La règle de Saurrs)*

8 8 0

$$\left|\begin{matrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix} = (0+96+3)-(8+8+0)=83\neq 0$$

0 96 3

المصفوفة مربعة ومحددها غير معدوم ومنه الجملة تقبل حل وحيد.

3. نستعمل طريقة المقلوب لإيجاد الشعاع X الذي يحقق (1)، وهي معطاة بالعلاقة التالية:

$$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$$

$A^{-1}$:(مقلوب $A$، يوجد لـ $A$ معكوس إذا كان $|A|\neq 0$).

و منه حل الجملة هو:

$$X = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

***4.*** و عليه المطلوب هنا إيجاد $A^{-1}$ بحيث أن : $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A))^t$

إذن

$$\boldsymbol{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 16 & -5 \\ 1 & -4 & 22 \\ 22 & -5 & -14 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{adj}(\boldsymbol{A}))^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}$$

**و منه**

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{83}}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}$$

**و بالتالي**

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**إذن**

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} -4 \times 3 + 1 \times 2 + 22 \times 1 \\ 16 \times 3 - 4 \times 2 - 5 \times 1 \\ -5 \times 3 + 22 \times 2 - 14 \times 1 \end{pmatrix}$$

**و منه**

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} 12 \\ 35 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/83 \\ 35/83 \\ 15/83 \end{pmatrix}$$

حلول الجملة هي: $\{(\frac{12}{83}, \frac{35}{83}, \frac{15}{83})\} = (x, y, z)$. **بالتعويض في إحدى المعادلات نتحقق من صحة النتائج.**

**نتبع نفس الخطوات لحل الجملة الثانية**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + 4y + z = -1 \\ 2x + 7\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

**1. الكتابة المصفوفية للجملة**

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**2. حساب المحدد** $|A| = 66 \neq 0$

**3. المصفوفة مربعة ومحددها غير معدوم ومنه الجملة تقبل حل وحيد. نستعمل طريقة المقلوب لإيجاد الشعاع X الذي يحقق (1)، وهي معطاة بالعلاقة التالية:**

$$X = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**4. نحسب $A^{-1}$ بالعلاقة المعطاة :** $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj(A))^t$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 27 \\ 17 & -4 & -3 \\ -10 & 14 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 17 & -10 \\ -8 & -4 & 14 \\ 27 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

إذن :

$$A^{-1} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 1 & 17 & -10 \\ -8 & -4 & 14 \\ 27 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

و منه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 1 & 17 & -10 \\ -8 & -4 & 14 \\ 27 & -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{66}}\begin{pmatrix} \mathbf{1 \times 0 + 17 \times (-1) + (-10) \times 2} \\ \mathbf{-8 \times 0 + (-4) \times (-1) + 14 \times 2} \\ \mathbf{27 \times 0 + +(-3) \times (-1) + (-6) \times 2} \end{pmatrix}$$

**بعد الحساب نجد:** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} -37 \\ 32 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37/66 \\ 32/66 \\ -9/66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37/66 \\ 16/33 \\ -3/22 \end{pmatrix}$

**حلول الجملة هي:** $(x, y, z) = \left\{\left(\frac{-37}{66}, \frac{16}{33}, \frac{-3}{22}\right)\right\}$. **بالتعويض في إحدى المعادلات نتحقق من صحة النتائج.**

## التمرين 2:

حل الجملة الخطية باستعمال كرامر

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

**1. الكتابة المصفوفية للجملة**

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

**2. حساب المحدد**

**بطريقة سايري *(La règle de Saurrs)***

$$-2 \quad 6 \quad -1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = (-2 - 3 + 2) - (-2 + 6 - 1) = -6 \neq 0$$

$$-2 \quad -3 \quad 2$$

**3. المصفوفة مربعة ومحددها غير معدوم ومنه الجملة تقبل حل وحيد. حلول الجملة بطريقة كرامر هي:**

$$x = \frac{\Delta_x}{|A|}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{|A|}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{|A|}.$$

حيث:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -18$$

**و منه**

$$x = \frac{-6}{-6} = 1, \qquad y = \frac{-12}{-6} = 2, \qquad z = \frac{-18}{-6} = 3.$$

حلول الجملة هي: $(x, y, z) = \{(1,2,3)\}$. **بالتعويض في إحدى المعادلات نتحقق من صحة النتائج.**

## التمرين 3:

**حل الجمل المتجانسة**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

1. **الكتابة المصفوفية للجملة**

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. **حساب المحدد** $|A| = 61 \neq 0$
3. **بما ان $|A| \neq 0$ فإن الجملة لديها حل وحيد و هو الحل الصفري أي مجموعة حلول الجملة هي $(x, y, z) = \{(0, 0, 0)\}$**

---

**حل الجمل المتجانسة**

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 0 \dots \dots . L_1 \\ 2x + y + z = 0 \ \dots \dots L_2 \\ x + 4y - 3z = 0 \dots L_3 \end{cases}$$

1. **الكتابة المصفوفية للجملة**

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. حساب المحدد $|A| = 0$
3. بما ان $|A| = 0$ فإن الجملة لديها عدد غير منته من الحلول، نجري تحويلات أولية على الجملة

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \quad \dots\dots L_2 \\ 5x + 5y = 0 \quad \dots\dots L_1 + L_2 \\ 2x + 2z = 0 \dots \quad L_1 - L_3 \end{cases}$$

و بالتالي يكون لدينا

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \dots\dots (1) \\ x = -y \\ x = -z \end{cases}$$

بتعويض قيمة x في المعادلة و منه $(1)$ نجد $z = y$ إذن

$$(x, y, z) = (-y, y, y) = y(-1, 1, 1)$$

4. و بالتالي من أجل كل قيمة لـــ y نحصل على حل جديد للجملة.