

Simulation

Chapitre 4:

Les outils probabilistes de modélisation pour simulation des systèmes dynamiques

Cours Master 1 GLSD

2019/2020

Pr. Salim BITAM

Département d'Informatique, Université de Biskra

07000 Biskra, Algérie

Contenu du chapitre ...

- Les chaînes de Markov
- Le théorème de Bayes

Les chaînes de Markov

Les chaînes de Markov (1)

- **Définition.** Une chaîne de Markov est:
- un système dynamique à temps discret
- synchrone
- où son évolution (évolution de ses états) suit un processus stochastique
- C'est une suite d'expérience dont le résultat dépend du hasard
- Selon ces expériences, le résultat (ou l'état prochain) peut être déterminé de manière probabiliste

Les chaînes de Markov (2)

- Nous admettrons que l'ensemble :
- $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Une chaîne de Markov est caractérisée par:
- Un nombre d'états x_i , qui prend sa valeur dans l'ensemble:
- $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m\}$
- L'observation du système étudié (à modéliser) est considérée comme une expérience dont le résultat qui est aléatoire, est l'état dans lequel se trouve le système

Les chaînes de Markov (3)

- Nous supposons que :
- Pour chaque paire d'état x_i et x_j et
- Pour chaque instant t ,
- La probabilité $P_{ij}(t)$ que le système soit dans l'état x_j à l'instant $t+1$, étant donné qu'il se trouve dans l'état x_i à l'instant t
- Ici, la probabilité $P_{ij}(t)$ ne dépend pas de t

Les chaînes de Markov (4)

- Les CM sont suggérées pour modéliser les phénomènes :
- qui peuvent être décrits par un ensemble d'états (situations) :
- qui changent dans le temps
- selon un processus probabiliste
- dont on peut savoir les probabilités de passage d'un état à l'instant t à un autre état à l'instant $t+1$
- et ceci par une étude de statistiques

Les chaînes de Markov: domaines d'application

- Modélisation/Simulation des systèmes météorologiques
- Modélisation/Simulation des systèmes de régulation de trafic routier
- Modélisation/Simulation des études de faisabilité des projets
- Modélisation/Simulation des systèmes dans l'agriculture
- Modélisation/Simulation des systèmes en finance (l'évolution des transaction au niveau d'une Bourse),
- autres...

Les chaînes de Markov-Formalisme: (1)

- Une CM est décrite par:

1. $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

2. Un ensemble d'états $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m\}$

3. Toutes les probabilités P_{ij} de transition (de passage) d'un état x_i à l'instant t à un état x_j à l'instant $t+1$,

4. Ces probabilités $P_{ij}(t)$ sont représentées dans une Matrice P appelée la matrice de Markov (ou la matrice de transitions), de dimension $m \times m$

Les chaînes de Markov-Formalisme: (2)

$$\begin{array}{c} \text{x1} \\ \text{x2} \\ \text{x3} \end{array} \begin{bmatrix} \text{x1} & \text{x2} & \text{x3} \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{23}(t) = 1/2$$

NB. La somme de chaque ligne vaut 1

Exemple d'une CM

- Une étude de la météo dans une ville située dans un pays au nord de la planète, à la fin de l'été, a montré les observations suivantes :
- Si on considère qu'il neige aujourd'hui, il est possible de **neiger** le lendemain avec une probabilité de **60%**, cependant dans les cas restants, on a une probabilité **identique** d'avoir soit un **beau jour** ou bien de la **pluie** le jour suivant,
- Si nous avons un beau jour ou de la pluie, alors nous avons **une chance sur quatre $\frac{1}{4}$** pour avoir la même chose le jour suivant,
- S'il y a un changement de beau jour ou de pluie, seulement la **moitié** des cas restants est ce changement à un jour de neige.

Exemple (2)

- $X = \{x1=\text{Beau jour}, x2=\text{pluie}, x3=\text{neige}\}$

$$\begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ x3 \end{array} \begin{bmatrix} x1 & x2 & x3 \\ 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 1/4 & 3/8 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Les transitions d'état par les CM

- Afin de prévoir les situations futures pour un système dynamique probabiliste, on peut utiliser un CM,
- Une prévision par une CM est basée sur un traitement (un calcul) des probabilités sur la matrice de transitions;
- Explication par l'exemple:

Exemple: livraison de Taxi dans une ville

- On suppose une agence de Taxi à trois (3) branches à une ville,
- Les branches sont:
 1. Centre ville (A)
 2. Est (B)
 3. Ouest (C)
- Les statistiques sur les livraisons ont données les valeurs suivantes:

1. Des appels téléphoniques à la branche du centre ville: 30% sont livrés au centre ville, 30% sont livrés dans l'Est et 40% sont livrés dans l'Ouest
2. Des appels à la branche de l'Est: 40% sont livrés au centre ville, 40% sont livrés dans l'Est et 20% sont livrés dans l'Ouest
3. Des appels à la branche de l'Ouest: 50% sont livrés au centre ville, 30% sont livrés dans l'Est et 20% sont livrés dans l'Ouest

- Après avoir effectué une livraison, le Taxi va à l'endroit le plus proche pour effectuer la prochaine livraison,
- On estime le temps d'une livraison = 15 minutes,
- $T = \{0, 1*U, 2*U, 3*U, \dots\} / U = 15 \text{ min}$

- $X = \{x_1=A, x_2=B, x_3=C\}$

	x1	x2	x3
x1	0.3	0.3	0.4
x2	0.4	0.4	0.2
x3	0.5	0.3	0.2

- Utilité: Question:
- Si on suppose qu'un Taxi, commence dans la branche de C, quelle est la probabilité qu'il sera dans la branche B après deux (2) livraison?

- Possibilités:
- (C-A) et (A-B)
- Ou bien (C-B) et (B-B)
- Ou bien (C-C) et (C-B)

$$P(CA) * P(AB)$$

+

$$P(CB) * P(BB)$$

+

$$P(CC) * P(CB) = (0.5 * 0.3) + (0.3 * 0.4) + (0.2 * 0.3) = 0.33$$

Il s'agit de

- Produit de P*P:

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$P(CA) * P(AB) + P(CB) * P(BB) + P(CC) * P(CB) = (0.5 * 0.3) + (0.3 * 0.4) + (0.2 * 0.3) = 0.33$$

- Pour deux livraisons (deux transitions), on calcule $P * P$ et puis on déduit les résultats,
- Pour trois livraisons (trois transitions), on calcule $P * P * P$ et puis on déduit les résultats,
- etc.

- P^*P

$$\begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ x3 \end{array} \begin{bmatrix} x1 & x2 & x3 \\ 0.41 & 0.33 & 0.26 \\ 0.38 & 0.34 & 0.28 \\ 0.37 & \mathbf{0.33} & 0.3 \end{bmatrix}$$

- $P^3 = P * P * P$

	x1	x2	x3
x1	0.385	0.333	0.282
x2	0.39	0.334	0.276
x3	0.393	0.333	0.274

- Pour trois livraisons, en partant de A et en arrivant à C : 0.282