Modélisation et Simulation

Chapitre 4:
Les outils probabilistes de modélisation des systèmes dynamiques

Cours Master 1 IVA

2019/2020

Pr. Salim BITAM

Département d'Informatique, Université de Biskra

07000 Biskra, Algérie

Contenu du chapitre …

- Les chaînes de Markov

- Le théorème de Bayes

Les chaînes de Markov

Les chaînes de Markov (1)

- **Définition.** Une chaîne de Markov est:
- un système dynamique à temps discret
- synchrone
- où son évolution (évolution de ses états) suit un processus stochastique
- C’est une suite d’expérience dont le résultat dépond du hasard
- Selon ces expériences, le résultat (ou l’état prochain) peut être déterminé de manière probabiliste

Les chaînes de Markov (2)

- Nous admettrons que l'ensemble :
- T= {0, 1, 2, 3, …}
- Une chaîne de Markov est caractérisée par:
- Un nombre d'états x_i, qui prend sa valeur dans l'ensemble:
- $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m\}$
- L'observation du système étudié (à modéliser) est considérée comme une expérience dont le résultat qui est aléatoire, est l'état dans lequel se trouve le système

Les chaînes de Markov (3)

- Nous supposons que :
- Pour chaque paire d'état x_i et x_j et
- Pour chaque instant t,
- La probabilité $P_{ij}(t)$ que le système soit dans l'état x_j à l'instant t+1, étant donné qu'il se trouve dans l'état x_i à l'instant t
- Ici, la probabilité $P_{ij}(t)$ ne dépond pas de t

Les chaînes de Markov (4)

- Les CM sont suggérées pour modéliser les phénomènes :
- qui peuvent être décrits par une ensemble d'états (situations) :
- qui changent dans le temps
- selon un processus probabiliste
- dont on peut savoir les probabilités de passage d'un état à l'instant t à un autre état à l'instant t+1
- et ceci par une étude de statistiques

Les chaînes de Markov: domaines d’application

- Modélisation/Simulation des systèmes météorologiques
- Modélisation/Simulation des systèmes de régulation de trafic routier
- Modélisation/Simulation des études de faisabilité des projets
- Modélisation/Simulation des systèmes dans l’agriculture
- Modélisation/Simulation des systèmes en finance (l'évolution des transaction au niveau d’une Bourse),
- autres…

Les chaînes de Markov-Formalisme: (1)

- Une CM est décrite par:

1. $T = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
2. Un ensemble d'états $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m\}$
3. Toutes les probabilités Pij de transition (de passage) d'un état x_i à l'instant t à un état x_j à l'instant t+1,
4. Ces probabilités $P_{ij}(t)$ sont représentées dans une Matrice P appelée la matrice de Markov (ou la matrice de transitions), de dimension m*m

Les chaînes de Markov-Formalisme: (2)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x1 & x2 & x3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ x3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$P_{23}(t)=1/2$

NB. La somme de chaque ligne vaut 1

Exemple d’une CM

- Une étude de la météo dans une ville située dans un pays au nord de la planète, à la fin de l’été, a montré les observations suivantes :
- Si on considère qu’il neige aujourd’hui, il est possible de neiger le lendemain avec une probabilité de 60%, cependant dans les cas restants, on a une probabilité identique d’avoir soit un beau jour ou bien de la pluie le jour suivant,
- Si nous avons un beau jour ou de la pluie, alors nous avons une chance sur quatre ¼ pour avoir la même chose le jour suivant,
- S’il y a un changement de beau jour ou de pluie, seulement la moitié des cas restants est ce changement à un jour de neige.

Exemple (2)

- X = {x1=Beau jour, x2=pluie, x3=neige}

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} x1 & x2 & x3 \end{array} \\
\begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ x3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 1/4 & 3/8 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Les transitions d'état par les CM

- Afin de prévoir les situations futures pour un système dynamique probabiliste, on peut utiliser un CM,
- Une prévision par une CM est basée sur un traitement (un calcul) des probabilités sur la matrice de transitions;
- Explication par l'exemple:

Exemple: livraison de Taxi dans une ville

- On suppose une agence de Taxi à trois (3) branches à une ville,
- Les branches sont:

1. Centre ville (A)
2. Est (B)
3. Ouest (C)

- Les statistiques sur les livraisons ont données les valeurs suivantes:

1. Des appels téléphoniques à la branche du centre ville: 30% sont livrés au centre ville, 30% sont livrés dans l’Est et 40% sont livrés dans l’Ouest
2. Des appels à la branche de l’Est: 40% sont livrés au centre ville, 40% sont livrés dans l’Est et 20% sont livrés dans l’Ouest
3. Des appels à la branche de l’Ouest: 50% sont livrés au centre ville, 30% sont livrés dans l’Est et 20% sont livrés dans l’Ouest

- Après avoir effectué une livraison, le Taxi va à l’endroit le plus proche pour effectuer la prochaine livraison,
- On estime le temps d’une livraison = 15 minutes,

- T = {0, 1*U, 2*U, 3*U, …} / U = 15 min

- X = {x1=A, x2=B, x3=C}

$$\begin{array}{c|ccc} & x1 & x2 & x3 \\ \hline x1 & & & \\ x2 & & \left[\begin{matrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{matrix}\right] & \\ x3 & & & \end{array}$$

- Utilité: Question:
- Si on suppose qu'un Taxi, commence dans la branche de C, quelle est la probabilité qu'il sera dans la branche B après deux (2) livraison?

- Possibilités:
- (C-A) et (A-B)
- Ou bien (C-B) et (B-B)
- Ou bien (C-C) et (C-B)

$P(CA) * P(AB)$

$+$

$P(CB) * P(BB)$

$+$

$P(CC) * P(CB) = (0.5 * 0.3) + (0.3 * 0.4) + (0.2 * 0.3) = 0.33$

Il s’agit de

- Produit de P*P:

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ \boxed{0.5 \quad 0.3 \quad 0.2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.3 & \boxed{\begin{matrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{matrix}} & 0.4 \\ 0.4 & & 0.2 \\ 0.5 & & 0.2 \end{bmatrix}$$

P(CA) * P(AB)+P(CB) * P(BB)+P (CC) * P(CB) =

(0.5 * 0.3) + (0.3 * 0.4) + (0.2 * 0.3) = 0.33

- Pour deux livraisons (deux transitions), on calcule P*P et puis on déduit les résultats,

- Pour trois livraisons (trois transitions), on calcule P*P*P et puis on déduit les résultats,
- etc.

- P*P

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} x1 & x2 & x3 \end{array} \\
\begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ x3 \end{array} &
\begin{bmatrix} 0.41 & 0.33 & 0.26 \\ 0.38 & 0.34 & 0.28 \\ 0.37 & \color{red}{0.33} & 0.3 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- $P^3 = P*P*P$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} x1 & x2 & x3 \end{array} \\
\begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ x3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.385 & 0.333 & 0.282 \\ 0.39 & 0.334 & 0.276 \\ 0.393 & 0.333 & 0.274 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Pour trois livraisons, en partant de A et en arrivant à C : 0.282