

Modélisation et Simulation
Chapitre 5:
Les outils probabilistes de modélisation pour la
simulation des systèmes dynamiques:
Le théorème de Bayes et l'état de croyance

Cours Master 1 GLSD

2019/2020

Pr. Salim BITAM

Département d'Informatique, Université de Biskra

07000 Biskra, Algérie

Le théorème de Bayes et l'état de croyance

Le théorème de Bayes: Idée

- Utilisation de la théorie des probabilités par un décideur pour :
- Apprendre automatiquement,
- Raisonner,
- Prendre des décisions,
- dans un domaine incertain,
- À partir d'un ensemble de perceptions.

Définition

- L'approche bayésienne est une approche basée sur la théorie des probabilités
- Qui aide à intégrer des incertitudes sur l'état d'un système
- Pour contribuer à prendre une décision
- Les probabilités peuvent représentées un degré de croyance pour le décideur

Domaines d'application

- Diagnostic médical (diagnostic des maladies),
- Systèmes industriels (détection des situations anormales),
- Détection et suivi d'objets dans une image ou une vidéo,
- Contrôle et suivi du mouvement des véhicules
- Etc.

Le théorème de Bayes: formalisme

- Soit l'ensemble $X = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un système complet d'états (dites aussi d'événements)
- Quelque soit l'événement B tel que :

$P(B) \neq 0$ alors:

$$P(A_i / B) = [P(B/A_i) * P(A_i)] / [(P(B/A_1)*P(A_1))+...+(P(B/A_n)*P(A_n))]$$

$$= \frac{P(B/A_i) * P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B/A_n) * P(A_n)}$$

Formule de Bayes

Exemple (1)

- Soit P une population de 100 habitants
- A : un habitant est atteint d'une méningite
- Après un diagnostic médical: (un événement B), résultat:
- B : a un mal à la nuque
- \bar{B} : n'a pas un mal à la nuque

Exemple (2)

- On a aussi les statistiques suivantes:
- Avant le diagnostic (théoriquement ou a priori), on a 1/100 de la population qui peuvent atteindre la méningite : ($P(A) = 0.01$)
- Si l'habitant A a une méningite , on est sûr de 80% qu'il avait un mal à la nuque : ($P(B/A) = 0.8$)
- Si l'habitant A n'a pas une méningite , on est sûr de 10% qu'il a un mal à la nuque : ($P(B/\bar{A}) = 0.1$)

Exemple (3)

- On soumet l'habitant A au diagnostic,
- Exemple: le diagnostic montre qu'a un mal à la nuque B = positif

Question: Quelle est la probabilité que ce patient A soit atteint d'une méningite? $P(A/B)$?

Selon le théorème de Bayes:

$$P(A_i / B) = \frac{P(B/A_i) * P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B/A_n) * P(A_n)}$$

$$P(A / B) = [P(B/A) * P(A)] / [(P(B/A)*P(A)) + (P(B/\bar{A})*P(\bar{A}))]$$

$$= [0.8 * 0.01] / [(0.8 * 0.01)+(0.1 * 0.99)] = 0,008 / (0,008+0,099)= 0.0747 \text{ (soit 7.47\%)}$$

Interprétation

- A partir de la connaissance sur la causalité $P(B/A)$ et sur la base de la probabilité théorique (a priori) $P(A)$,
- => on peut prévoir (dans cet état incertain) une sortie (une conséquence ou un état de croyance) sur un cas (ex. cas de diagnostic).