Modélisation et Simulation

Chapitre 2:
Les systèmes dynamiques

Cours Master 1 IVA

2019/2020

Pr. Salim BITAM

Département d'Informatique, Université de Biskra

07000 Biskra, Algérie

Notions de base

1. Temps: est l'ensemble T

- Représente les instants de l'échantillonnage du système étudié
- Tel que chaque valeur t ϵ T est associée à une valeur d'entrée et une valeur de sortie

2. Entrée(s):

- Représentée(s) par un ensemble U,
- De valeurs u(t) ϵ U qui,
- Définissent l'évolution des entrées à un instant t

3. Sortie (s):

- Représentée(s) par un ensemble Y,
- De valeurs $y(t) \in Y$ qui,
- Définissent l’évolution des sorties à un instant t

NB. L’évolution d’une valeur est la variation de cette grandeur dans un très petit intervalle $[t, t+dt]$

Un système à temps continu vs un système à temps discret (1)

- **Définition:** Un système est dit à temps continu si l'ensemble T est l'ensemble des nombres réels IR.
- Exemple: un système qui décrit le flux du pétrole dans un pipeline est système à temps continu.
- Dans un tel système, la variable d'état change d'une manière continue le long du temps.

Un système à temps continu vs un système à temps discret (2)

- **Définition.** Un système est dit à temps discret si l'ensemble T est un ensemble discret.
- On distingue deux types de systèmes à temps discrets:
- Un système à temps discret synchrone : dans lequel les variables du système prennent leur valeurs selon une fréquence préétablie,
- Exemple: un système qui décrit l'évolution mensuelle des vente des dates d'un pays,
- Ici, l'ensemble T est l'ensemble des nombres entiers,

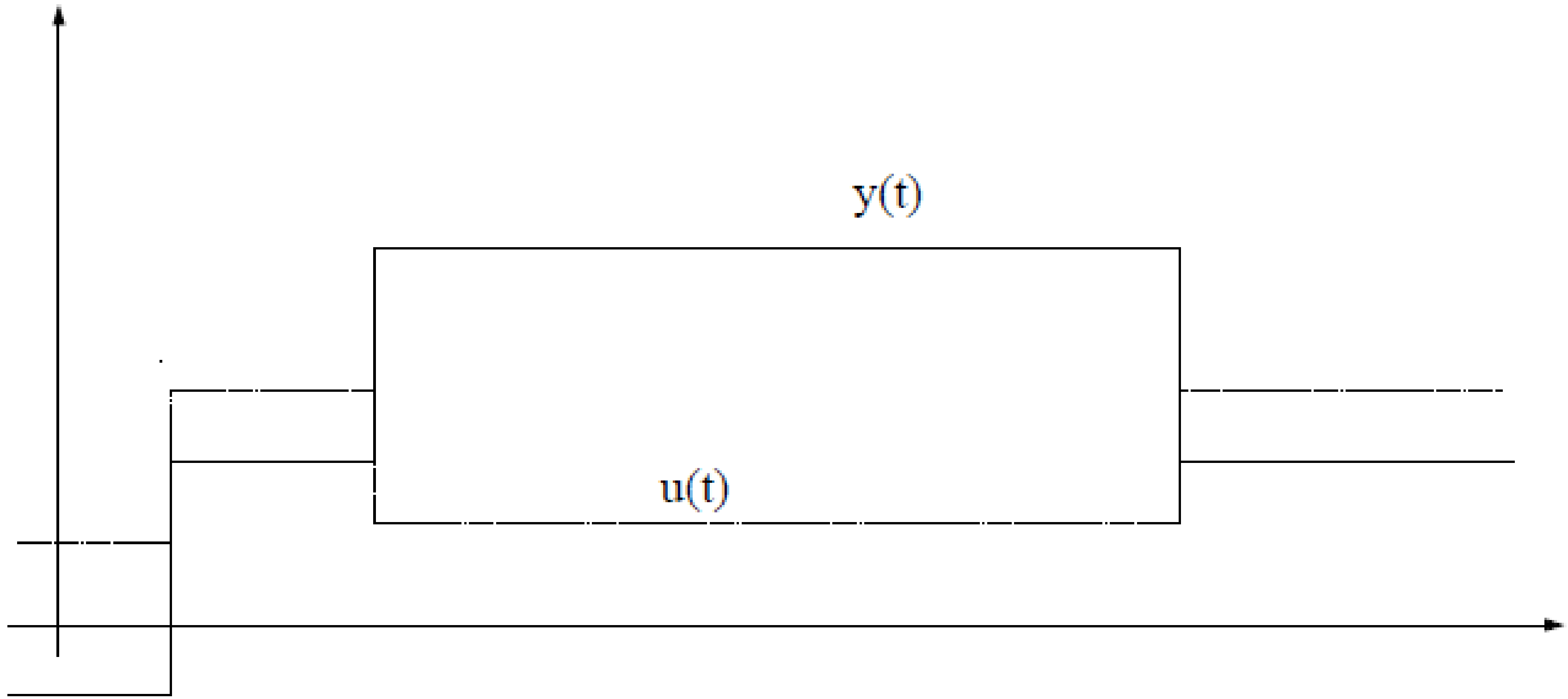
Un système à temps continu vs un système à temps discret (3)

- **Définition.** Un système est dit à temps discret si l'ensemble T est un ensemble discret.
- On distingue deux types de systèmes à temps discrets:
- Un système à temps discret asynchrone : dans lequel les variables du système prennent leur valeurs selon une distribution aléatoire,

- Exemple: un système qui décrit le nombre d’un article acheté d’un supermarché est un système à temps discret asynchrone.
- Ici, un article vendu change est comptabilisé seulement quand un client le prend.

Un système statique vs un système dynamique (1)

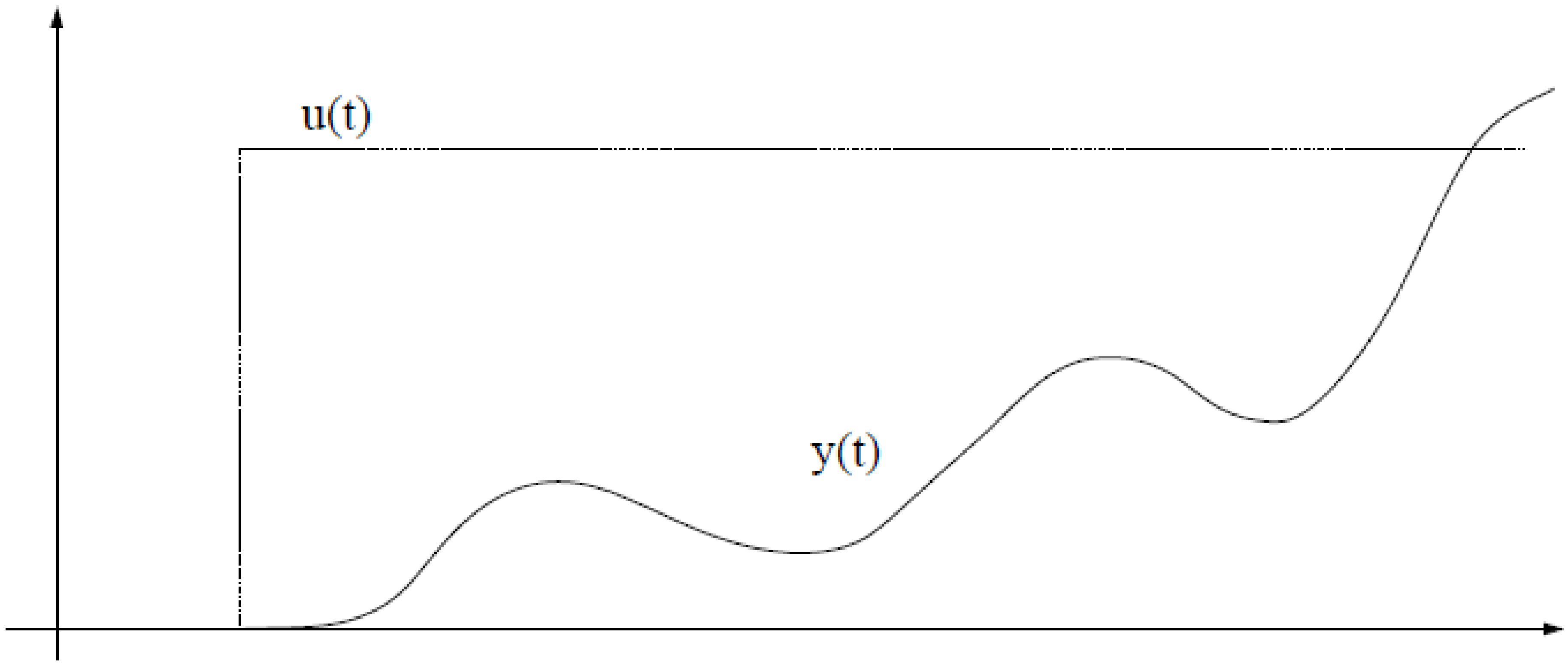
- Définition: un système est appelé statique si la connaissance d'une valeur d'entrée détermine de manière unique la connaissance de la valeur de sortie quelque soit l'intervalle de temps
- Pour un système statique: aucun changement de la valeur de la sortie n'aura lieu si la valeur de l'entrée est constante



- Système statique

Un système statique vs un système dynamique (2)

- Définition: un système est appelé dynamique si la connaissance d'une valeur d'entrée ne détermine de manière unique la connaissance de la valeur de sortie dans des intervalles de temps différents
- Pour un système dynamique: la valeur de la sortie change non seulement en fonction de la valeur de l'entrée



- Système dynamique

Fonctions d’entrée et fonction de sortie

- Exemple du réservoir … voir le cours (présentiel) …

L’état du système dynamique

- Conclusion de l’exemple du réservoir:

- L’historique passé d’un système aide à la détermination de la sortie en fonction de l’entrée par un formalise

- L’historique du système peut être représenté par une nouvelle grandeur appelée: L’**état** du système dynamique (symbolisée par: $x(t)$)

Définition axiomique d’un système dynamique (1)

- Ensemble T: Temps
- Ensemble U: valeurs d’entrée dont $u(t) \in U$ est une valeur d’entrée
- Ensemble Ω: fonctions d’entrée dont $u(.) \in \Omega$
- Ensemble X: états du système
- Ensemble Y: valeurs de sortie dont $y(t) \in Y$ est une valeur de sortie
- Ensemble Γ: fonctions de sortie

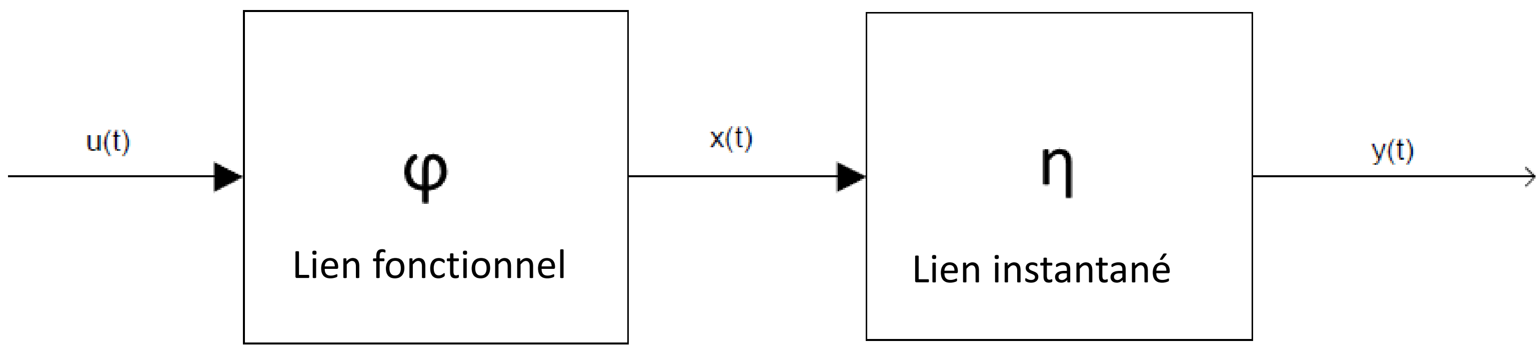
Définition axiomique d’un système dynamique (2)

- Fonction de transition d’état φ: $x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u(.))$ /permet de trouver le nouvel état du système à l’instant t, sachant que le système était dans l’état $x(t_0)$ à l’instant t_0, ceci est assuré par l’application de la fonction d’entrée u(.) qui correspond à l’intervalle $[t_0, t]$

- Fonction de transformation de sortie η: $y(t) = \eta(t, x(t))$ /permet de trouver la valeur de sortie à l’instant t

Définition axiomique d’un système dynamique (3)

- Un système dynamique peut être représenté par le t-uple suivant:
- $S = (T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, \eta)$



Un système dynamique

Propriétés sur le systèmes dynamique et la fonction de transition d'état (1)

- État d'équilibre (1):
- Définition:
- Un état $\bar{x}$ ϵ X est dit d'équilibre en *en* temps infini si pour chaque instant initial t ϵ T, il existe une fonction d'entrée u(.) ϵ Ω telle que:

$$\varphi(t, t0, \bar{x}, u(.)) = \bar{x} \qquad \forall\, t \in T$$

Propriétés sur le systèmes dynamique et la fonction de transition d'état (2)

- État d'équilibre (2):
- Exemple 1 (réservoir):
- Soit un état initial x(t) = 0, si d_in ≤ d_out ∀ t ϵ T, alors

φ(t, t0, x(t) = 0, u(.)) = 0, donc, x(t) = 0 est un état d'équilibre noté $\bar{x}$

- Exemple 2 (réservoir):
- Soit un état initial x(t) = Val, si d_in = d_out ∀ t ϵ T, alors

φ(t, t0, x(t) = Val, u(.)) = Val, donc, x(t) = Val est un état d'équilibre noté aussi $\bar{x}$

Propriétés sur le systèmes dynamique et la fonction de transition d'état (3)

- Trajectoire et Mouvement d'un système dynamique:
- Trajectoire d'un système:
- La trajectoire d'un système est l'ensemble des valeurs {x(t)} pour tous les $t \in T$
- Le mouvement d'un système est l'ensemble des couples pour (t, x(t)) pour tous les $t \in T$.
- NB. le mouvement est défini dans l'espace $T \times X$ alors que la
- trajectoire est définie comme la projection du mouvement dans l'espace X.

- Exemple:

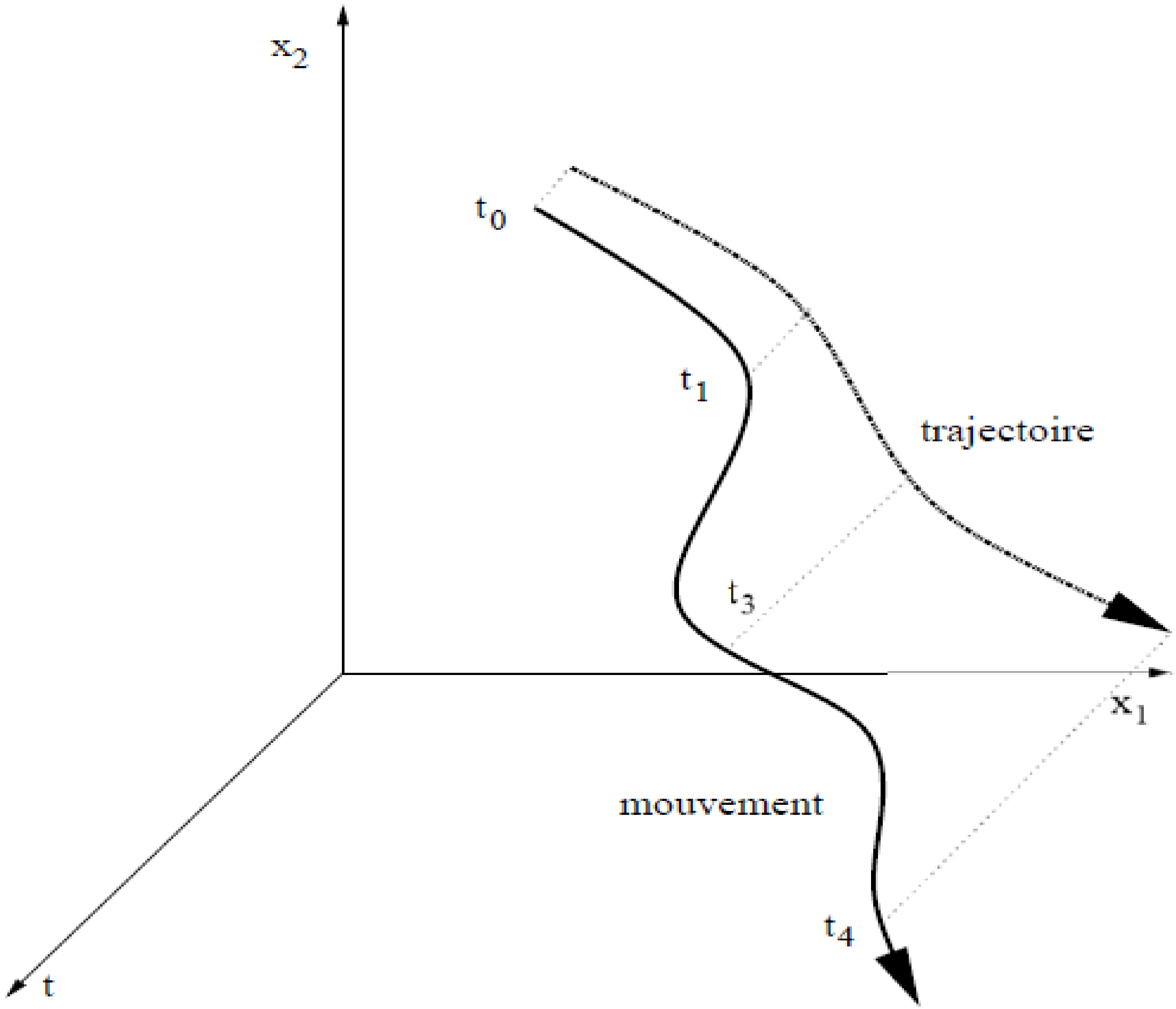
Pour un système dynamique:

(position d’une fusée lancée)

qui à un état défini sur deux grandeurs X1 et X2 :

(X1: distance parcouru, X2: vitesse de la fusée),

On a le mouvement et la trajectoire de ce système :


x_2
t_0
t_1
trajectoire
t_3
x_1
mouvement
t_4
t

Propriétés sur le systèmes dynamique et la fonction de transition d'état (4)

- Système invariant:
- Définition:
- Un système dynamique est dit invariant (ou stationnaire) si le **mouvement** du système obtenu à partir d'un état x(t0) à l'instant t0 suite à la fonction d'entrée u(.) appliquée pour l'intervalle [**t0, t**] **est égal** au **mouvement** obtenu en partant toujours de l'état à x(t0) un instant de temps t0 + δ et en appliquant une fonction d'entrée u(.) appliquée pour l'intervalle [**t0+ δ, t+ δ**].
- Ceci signifie que les expériences peuvent être reproduites.