Université Mohamed Khider de Biskra
Département de Science de la nature et de la vie
Module: BioStatistiques

Serie de TD N^o 01

Exercice 01:
Déterminer la limite des suites (U_n) ci-dessous:
$(\mathbf{1})\, U_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$, $(2)\, U_n = \frac{n \sin x}{n^2+1}$, $(3)\, U_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$,$(4)\, U_n = \frac{2^n}{n!}$,$(5)\, U_n = \frac{n^3}{2^n}$, $(6)\, U_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $(7)\, U_n = 5^n - 4^n$.

Exercice 02:
On considére la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par

$$\begin{cases} U_1 & = -1 \\ U_{n+1} & = \frac{2U_n}{3U_n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

et les suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que

$$V_n = \frac{2}{U_n} \text{ et } W_n = V_n + 5^n.$$

1/ Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique, et écrire V_n en fonction de n.
2/ On considère la somme, $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ Ecrire S_n en fonction de n.

Exercice 03:
On considére la suite U définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} U_0 & = 0 \\ U_{n+1} & = \sqrt{2U_n + 3} \end{cases}$$

1/ Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq 3$.
2/ Montrer que la suite U est strictement croissante.
3/ Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 04:
Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 & = 1 \\ U_{n+1} & = 2U_n + 1 - n; \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n; $U_n \geq n$.
Qu'en déduit-on.

Exercice 05:
Montrer que de termes généraux

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } V_n = U_n + \frac{1}{n}.$$

sont adjacentes. Que pouvez-vous en déduire.

Corrigé de la Série TD N^o 01

Exercice 01:

1. $U_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1+\frac{1}{n}}-1\right) \longmapsto +\infty$

2. On a $\left|\frac{n\sin n}{n^2+1}\right| \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n}$ donc $\quad U_n \mapsto 0 \quad$ lorsque $n \longmapsto +\infty$.

3. $U_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ est divergente.
En effet, si U_n était convergente vers une limite l, toute suite extraite serait aussi convergente, vers la même limite. Or,
$U_{2k} = \frac{1}{2k} + 1 \mapsto 1 \quad$ lorsque $\quad k \longmapsto +\infty$.
$U_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} - 1 \mapsto -1$ lorsque $\quad k \longmapsto +\infty$.

4. $U_n = \frac{2^n}{n!}$, On a $\ln\left(\frac{2^n}{n!}\right) = n\ln 2 - (\ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n)$ .Or
$n\ln n = \left(\underbrace{\ln 2 + \ln 2 + ... + \ln 2}_{n \text{ fois}}\right)$ alors
$\ln\left(\frac{2^n}{n!}\right) = \ln 2 + (\ln 2 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + ... + (\ln 2 - \ln n)$,
Dans le membre de droite, les termes entre parenthèse formentue suite négative, décoissant, qui tend vers $-\infty$, ceci montre que:
$\ln\left(\frac{2^n}{n!}\right) \longmapsto -\infty$ donc $\frac{2^n}{n!} \longmapsto 0$ lorsque $n \longmapsto +\infty$.

5. $U_n = \frac{n^3}{2^n}$, On a $\ln\left(n^3 2^{-n}\right) = 3\ln n - n\ln 2 \longmapsto -\infty$, donc $U_n \longmapsto 0$ lorsque $n \longmapsto +\infty$.

6. Puisque $-1 \prec \frac{1}{3} \prec 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, on conclut que $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

7. On factorise; pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 5^n - 4^n = 5^n\left(1 - \frac{4^n}{5^n}\right) = 5^n\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

   Puisque $-1 \prec \frac{4}{5} \prec 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

   donc $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n = 1$. et puisque $\lim\limits_{n\to\infty} 5^n = +\infty$; on déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty$.

Exercice 02:

1/ On dit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique; $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $V_{n+1} - V_n = r$.
Soit $n \in \mathbb{N}$; $V_{n+1} = \frac{2}{U_{n+1}} = \frac{2}{\frac{2U_n}{3U_n+2}} = \frac{2(3U_n+2)}{2U_n} = \frac{3U_n+2}{U_n}$.
$V_{n+1} - V_n = \frac{3U_n+2}{U_n} - \frac{2}{U_n} = \frac{3U_n+2-2}{U_n} = 3$.
Donc $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 3.
-On a $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 3 alors;

$$V_n = V_p + (n-p)\,r \quad \forall \ n \geq p.$$

alors; $V_n = V_1 + (n-1)\,r = -1 + 3\,(n-1) = 3n - 5$.
Donc $V_n = 3n - 5$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2/ On a:

$$\begin{aligned} S_n &= W_1 + W_2 + ... + W_n \\ &= V_1 + 5^1 + V_2 + 5^2 + ...V_n + 5^n \\ &= V_1 + V_2 + ... + V_n + 5^1 + 5^2 + ... + 5^n. \end{aligned}$$

On a $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison 3.

Soit $a_n = 5^n$; On a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison 5 alors;

$$V_1 + V_2 + ... + V_n = \frac{n}{2}\left(V_1 + V_n\right);$$

et

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1\left(\frac{1-5^n}{1-5}\right).$$

$$\begin{aligned} S_n &= \tfrac{n}{2}\left(V_1 + V_n\right) + 5\left(\tfrac{1-5^n}{1-5}\right) \\ &= \tfrac{n}{2}\left(-2 + 3n - 5\right) - \tfrac{5}{4}\left(1 - 5^n\right) \\ &= \tfrac{n(3n-7)}{2} - \tfrac{5}{4}\left(1 - 5^n\right). \end{aligned}$$

Exercice 03:

1/ Démonstration par récurrence:

Notons $P(n)$ la propriété $(0 \leq U_n \leq 3)$

Initialisation: pour $n = 0$ $U_0 = 0 \Longrightarrow 0 \leq U_0 \leq 3$ alors la propriété $P(0)$ est vraie.

Hérédité: supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un entier n, çà $0 \leq U_n \leq 3$

On écrit alors successivement $0 \leq U_n \leq 3 \Longrightarrow 2\times 0+3 \leq 2U_n+3 \leq 2\times 3+3$ alors $3 \leq 2U_n + 3 \leq 9$, et en utilisant la criossance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, on obtient $\sqrt{3} \leq \sqrt{2U_n+3} \leq \sqrt{9}$çà $\sqrt{3} \leq \sqrt{2U_n+3} \leq 3$ donc $\sqrt{3} \leq U_{n+1} \leq 3$

Ce qui prouve la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ çà

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_n \leq 3.$$

2/ Démonstration par récurrence:

Notons $P(n)$ la propriété $(U_n \leq U_{n+1})$

Initialisation: pour $n = 0$; $U_1 = \sqrt{2U_0+3} = \sqrt{3} \Longrightarrow U_0 \leq U_1$.

Alors la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité: supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un entier n, çà $U_n \leq U_{n+1}$.

On écrit alors successivement $U_n \leq U_{n+1} \Longrightarrow 2U_n+3 \leq 2U_{n+1}+3$, utilisant la criossance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, on obtient $\sqrt{2U_n+3} \leq \sqrt{2U_{n+1}+3}$ çà $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

Ce qui prouve la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ çà la suite U est strictement croissante.

3/ puisque U est strictement croissante et majorée, elle converge vers une limite l.

Puisque pour tout entier $n, U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f : x \to \sqrt{2x+3}$, qui est continue sur $[0, +\infty[$, la limite l vérifie $l = f(l)$.

On résout l'équation $l = \sqrt{2l+3} \Leftrightarrow l^2 - 2l = 0$ et $l \succ 0$.

En calculant le discriminant de l'équation. On obtient $\Delta = 16 \Longrightarrow l_1 = -1$ et $l_2 = 3$.

La condition $l \succ 0$ entraîne le faire que : $\underset{n\to+\infty}{lim} U_n = 3$.

Exercice 04:

1/ Démonstration par récurrence:

Notons $Q(n)$ la propriété $(U_n \geq n)$

Initialisation: pour $n = 0$; $U_0 = 1 \Longrightarrow 0 \leq 1$.

Alors la propriété $Q(n)$ est vraie pour $n = 0$.

Hérédité: supposons la propriété $Q(n)$ vraie pour un entier , çà

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 2U_n + 1 - n \geq 2n + 1 - n \\ &\geq n + 1 \end{aligned}$$

Oui est la propriété $Q(n+1)$, donc $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad U_n \geq n$$

et

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty.$$

Donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 05:

Definition 1 *Deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont dites adjacentes si*
1/ $\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad U_n \leq V_n$.
2/ $(U_n)_n$ est croissante et $(V_n)_n$ est décroissante.
3/ $\lim\limits_{n\to\infty} (U_n - V_n) = 0$.

1/$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad U_n \leq V_n$; en effet:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n - V_n = -\frac{1}{n} \leq 0;$$

2/ La suite $(U_n)_n$ est croissante; en effet:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

et La suite $(V_n)_n$ est décroissante; en effet:

$$\begin{array}{ll} V_n - V_{n+1} & = U_n + \frac{1}{n} - U_{n+1} + \frac{1}{n+1} \\ & = -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \\ & = \frac{-n+(n+1)^2-n(n+1)}{n(n+1)^2} \\ & = \frac{-n+n^2+2n+1-n^2-n}{n(n+1)^2} \\ & \frac{1}{n(n+1)^2} \geq 0. \end{array}$$

3/ $\lim\limits_{n\to\infty} (V_n - U_n) = \frac{1}{n} = 0$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On en déduit qu'elles sont convergentes et qu'elles convergent vers une même limite.