Chapitre III

Fonctions hyperboliques et applications réciproques

A Fonctions hyperboliques directes

A.1 Sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

On va définir de nouvelles fonctions inspirées notamment par les formules d'Euler concernant les fonctions sinus et cosinus.

A.1.1 Définition

On appelle fonction *sinus hyperbolique* la fonction

$$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On appelle fonction *cosinus hyperbolique* la fonction

$$\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

A.1.2 Remarques

- La fonction sh est impaire.
  En effet, elle est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

  $$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{-e^{-x} + e^x}{2} = -\operatorname{sh} x.$$

  Le graphe de la fonction sh admet donc l'origine pour centre de symétrie ; en particulier, on a $\operatorname{sh} 0 = 0$.
- La fonction ch est paire.
  En effet, elle est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

  $$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Le graphe de la fonction ch admet donc l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \Big(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\Big)^2 = \frac{\big(e^x\big)^2 + 2e^x e^{-x} + \big(e^{-x}\big)^2}{4} - \frac{\big(e^x\big)^2 - 2e^x e^{-x} + \big(e^{-x}\big)^2}{4}$$

d'où

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1.$$

► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch} x \geqslant 1$.
En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $\operatorname{ch} x > 0$. D'autre part, la relation $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$ donne $\operatorname{ch}^2 x \geqslant 1$ donc $\operatorname{ch} x \geqslant 1$ ou $\operatorname{ch} x \leqslant -1$. Comme $\operatorname{ch} x > 0$, c'est donc que $\operatorname{ch} x \geqslant 1$.

A.1.3 Proposition

La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est ch.
La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est sh.

Démonstration

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de même que la fonction $x \mapsto e^{-x}$, donc les fonction ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (ce sont des sommes de fonctions dérivables). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{sh}' x = \Big[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\Big]' = \frac{e^x - \big(-e^{-x}\big)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

i.e. $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$. De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{ch}' x = \Big[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\Big]' = \frac{e^x + \big(-e^{-x}\big)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

i.e. $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.

Passons à l'étude des variations de ces deux fonctions.

► Pour la fonction sh, il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$ puisqu'il s'agit d'une fonction impaire. La dérivée de sh est ch et on a vu que $\operatorname{ch} x \geqslant 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\operatorname{ch} 0 = 1$ donc le graphe de sh admet la droite Δ d'équation $y = x$ pour tangente en 0. Étudions la position du graphe par rapport à cette tangente. Il convient donc d'étudier le signe de la fonction $f(x) = \operatorname{sh} x - x$, cette fonction est dérivable, de dérivée $f'(x) = \operatorname{ch} x - 1 \geqslant 0$. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$ or $f(0) = 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$ *i.e.* le graphe de sh est situé au-dessus de la droite Δ pour $x \geqslant 0$ et en-dessous de Δ pour $x \leqslant 0$.

En ce qui concerne les limites, on a $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\operatorname{sh} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Cherchons maintenant si le graphe admet une asymptote en $+\infty$; pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \underbrace{\frac{e^x}{2x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty} - \underbrace{\frac{e^{-x}}{2x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

On dit que le graphe de sh admet en $+\infty$ une *branche parabolique* de direction l'axe des ordonnées.

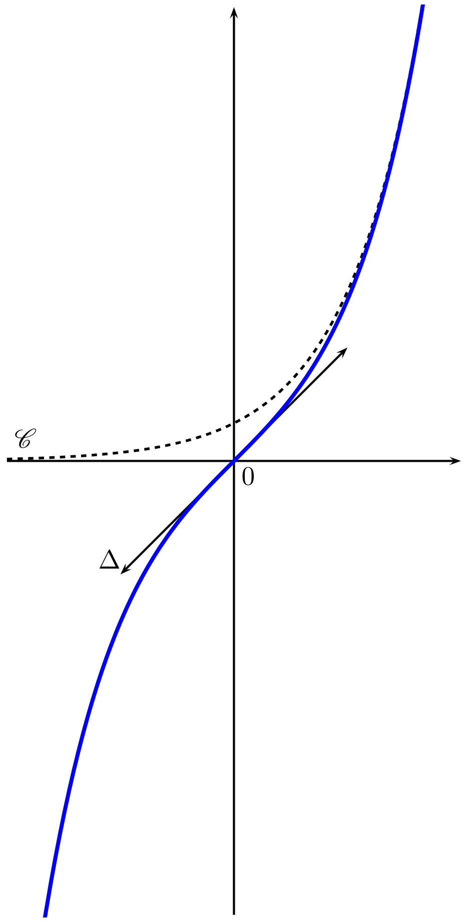
On peut préciser ce résultat puisque

$$\operatorname{sh} x - \frac{e^x}{2} = -\frac{e^{-x}}{2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^-$$

i.e. le graphe de sh et celui de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{e^x}{2}$ sont asymptotes en $+\infty$; de plus, la limite étant 0^-, le graphe de sh est situé en-dessous de $\mathscr{C}$.

On peut maintenant dresser le tableau de variations de la fonction sh et tracer son graphe.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh}'x = \operatorname{ch}x$		$+$		$+$	
$\operatorname{sh}x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



► Pour la fonction ch, il suffit là aussi de l'étudier sur $[0, +\infty[$ puisqu'il s'agit d'une fonction paire. La dérivée de ch est sh et on a vu que $\operatorname{sh} x > 0$ pour $x > 0$ donc ch est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On a $\operatorname{sh} 0 = 0$ donc le graphe de sh admet la droite Δ' d'équation $y = 1$ pour tangente en 0. Comme $\operatorname{ch} x \geqslant 1$ pour tout x, le graphe de ch est situé au-desus de Δ'.

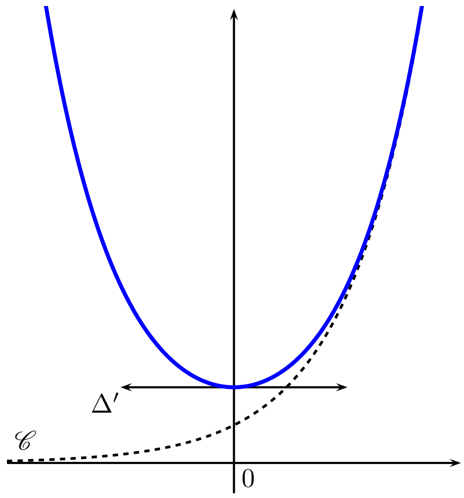
En ce qui concerne les limites, on a $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $\operatorname{ch} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. De même que pour la fonction sh, le graphe de ch admet en $+\infty$ une *branche parabolique* de direction l'axe des ordonnées ; plus précisément, on a

$$\operatorname{ch} x - \frac{e^x}{2} = \frac{e^{-x}}{2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+$$

i.e. le graphe de ch et celui de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{e^x}{2}$ sont asymptotes en $+\infty$; de plus, le graphe de ch est situé au-dessus $\mathscr{C}$.

On peut maintenant dresser le tableau de variations de la fonction ch et tracer son graphe.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{ch}'x = \text{sh}x$		$-$		$+$	
$\text{ch}x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



A.2 Tangente hyperbolique

Le fait que la fonction cosinus hyperbolique ne s'annule pas permet d'introduire la fonction suivante :

A.2.1 Définition

On appelle fonction *tangente hyperbolique* la fonction

$$\text{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

A.2.2 Remarques

- La fonction th est impaire.
  En effet, elle est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
  $$\text{th}(-x) = \frac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(-x)} = \frac{-\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = -\text{th}\, x.$$
  Le graphe de la fonction th admet donc l'origine pour centre de symétrie ; en particulier, on a $\text{th}\, 0 = 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - \text{th}^2 x = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
  $$1 - \text{th}^2 x = 1 - \frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch}^2 x}.$$

► On rencontre parfois la fonction *cotangente hyperbolique* qui est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{th} x}$ (mais qui n'est pas définie en 0).

A.2.3 Proposition

La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par : $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

Démonstration

Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et la fonction ch est définie sur tout $\mathbb{R}$ donc le quotient $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ définit bien une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{th}' x = \left[\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right]' = \frac{\operatorname{sh}' x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch}' x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Passons à l'étude des variations. Il suffit d'étudier th sur $[0, +\infty[$ puisqu'il s'agit d'une fonction impaire. La dérivée de th est $\left(\frac{1}{\operatorname{ch}}\right)^2$ donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\operatorname{ch} 0 = 1$ donc le graphe de th admet la droite Δ d'équation $y = x$ pour tangente en 0. Étudions la position du graphe par rapport à cette tangente. Il convient donc d'étudier le signe de la fonction $g(x) = \operatorname{th} x - x$, cette fonction est dérivable, de dérivée $g'(x) = \left(1 - \operatorname{th}^2 x\right) - 1 \leqslant 0$. La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}$ or $g(0) = 0$ donc $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$ *i.e.* le graphe de th est situé en-dessous de la droite Δ pour $x \geqslant 0$ et au-dessus de Δ pour $x \leqslant 0$.

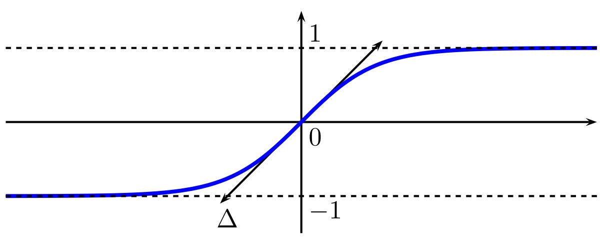
En ce qui concerne les limites, on a :

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

mais $e^{-2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc le numérateur et le dénominateur du quotient ci-dessous tendent tous deux vers 1. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1$. Il s'ensuit que le graphe de th admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote en $+\infty$ (donc, par imparité, il admet la droite d'équation $y = -1$ pour asymptote en $-\infty$).

On peut maintenant dresser le tableau de variations de la fonction th et tracer son graphe.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$		$+$		$+$	
$\operatorname{th} x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



B Fonctions hyperboliques réciproques

B.1 Réciproque de la fonction sinus hyperbolique

► La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur son image $\mathbb{R}$ et on peut définir son application réciproque.

B.1.1 Définition

On appelle *fonction argument sinus hyperbolique*, et on note

$$\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{Argsh} x \ ,$$

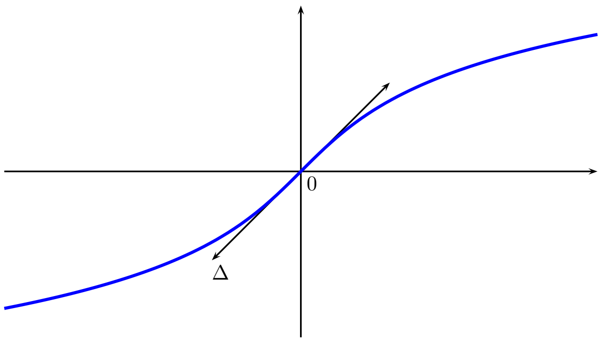
l'application réciproque de la fonction sinus hyperbolique.

B.1.2 Remarque

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{sh}\big(\operatorname{Argsh} x\big) = x$ et $\operatorname{Argsh}\big(\operatorname{sh} x\big) = x$.

Les variations de la fonction Argsh sur $\mathbb{R}$ sont les mêmes que celles de la fonction sh sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{Argsh} x$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$



B.1.3 Proposition

La fonction Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R} \ , \ \operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Démonstration

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)}.$$

Mais la fonction ch est positive donc on peut écrire

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh} x)}}$$

et la conclusion vient du fait que $\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} x) = x$.

B.2 Réciproque de la fonction cosinus hyperbolique

► La fonction ch est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur son image $[1, +\infty[$ et on peut définir son application réciproque.

B.2.1 Définition

On appelle *fonction argument cosinus hyperbolique*, et on note

$$\operatorname{Argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[, x \mapsto \operatorname{Argch} x \ ,$$

l'application réciproque de la restriction de la fonction cosinus hyperbolique à l'intervalle $[0, +\infty[$.

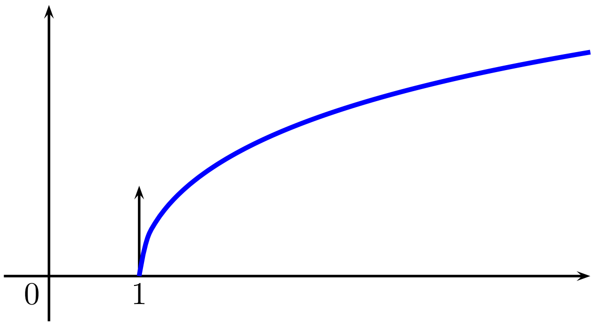
B.2.2 Remarques

► Pour tout $x \geqslant 1$, on a $\operatorname{ch}\big(\operatorname{Argch} x\big) = x$.

► Pour tout $x \geqslant 0$, on a $\operatorname{Argch}\big(\operatorname{ch} x\big) = x$.
Il faut, de nouveau, prendre garde au fait que l'expression $\operatorname{Argch}\big(\operatorname{ch} x\big)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais ne vaut exactement x que lorsque $x \geqslant 0$.

Les variations de la fonction Argch sur $[1, +\infty[$ sont les mêmes que celles de la fonction ch sur $[0, +\infty[$.

x	$1 \qquad +\infty$
$\operatorname{Argch} x$	$0 \nearrow +\infty$



B.2.3 Proposition

La fonction Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}\ , \ \operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Démonstration

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{Argch} x)} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x)}.$$

Mais $\operatorname{Argch} x \geqslant 0$ et la fonction sh est positive sur $[0, +\infty[$ donc $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x) \geqslant 0$ et on peut écrire

$$\operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch} x)}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argch} x) - 1}}$$

et la conclusion vient du fait que $\operatorname{ch}(\operatorname{Argch} x) = x$.

B.3 Réciproque de la fonction tangente hyperbolique

▶ La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de cet intervalle sur son image $]-1,1[$ et on peut définir son application réciproque.

B.3.1 Définition

On appelle *fonction argument tangente hyperbolique*, et on note

$$\text{Argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \text{Argth}\, x \ ,$$

l'application réciproque de la fonction tangente hyperbolique.

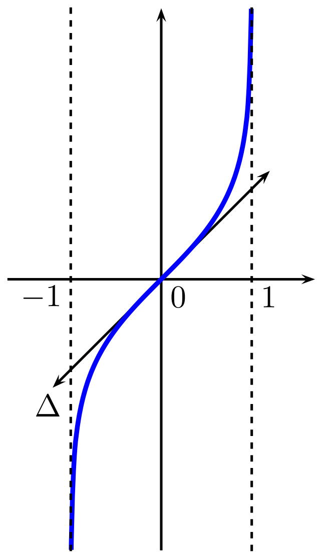
B.3.2 Remarques

▶ Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\text{th}\left(\text{Argth}\, x\right) = x$.

▶ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{Argth}\left(\text{th}\, x\right) = x$.

Les variations de la fonction Argth sur $]-1,1[$ sont les mêmes que celles de la fonction th sur $\mathbb{R}$.

x	-1	0	1
$\text{Argth}\, x$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$



B.3.3 Proposition

La fonction Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\text{pour tout} \quad x \in]-1,1[\ , \ \text{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Démonstration

En effet, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\text{Argth}'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{Argth}\, x)} = \frac{1}{1-\text{th}^2(\text{Argth}\, x)}.$$

et la conclusion vient du fait que $\text{th}(\text{Argth}\, x) = x$.

C Identités et relations

C.1 Quelques formules de trigonométrie hyperbolique

Les formules de trigonométrie classiques ont des analogues en « trigonométrie hyperbolique ». Outre la formule $ch^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1$, on a par exemple

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\
\operatorname{ch}(a-b) &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\
\operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \\
\operatorname{sh}(a-b) &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \\
\operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \\
\operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(2a) &= \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a \\
\operatorname{sh}(2a) &= 2\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a \\
\operatorname{th}(2a) &= \frac{2\operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}.
\end{aligned}$$

Notons en outre le lien suivant entre les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques :

$$\operatorname{ch} a = \cos(ia) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} a = -i\sin(ia).$$

C.2 Expression des fonctions hyperboliques réciproques avec le logarithme népérien

C.2.1 Proposition

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(b) Pour tout $x \geqslant 1$, on a : $\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

(c) Pour tout $x \in]-1,1[$, on a : $\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Démonstration

(a) La relation $y = \operatorname{sh} x$ signifie $2y = e^x - e^{-x}$ *i.e.* $\left(e^x\right)^2 - 2ye^x - 1 = 0$, d'où

$$y = \operatorname{sh} x \iff \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2yX - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = e^x \\ X = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1} \end{cases}$$

mais $X = e^x > 0$ alors que $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ donc

$$y = \operatorname{sh} x \iff e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

donc $\operatorname{Argsh} y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.

(b) La relation $y = \operatorname{ch} x$ signifie $2y = e^x + e^{-x}$ *i.e.* $\left(e^x\right)^2 - 2ye^x + 1 = 0$, d'où

$$y = \operatorname{ch} x \iff \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2yX + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = e^x \\ X = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1} \end{cases}$$

mais on a

$$\ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) = \ln\left(\frac{\left(y - \sqrt{y^2-1}\right)\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)}{y + \sqrt{y^2-1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{y + \sqrt{y^2-1}}\right) \xrightarrow[y \to +\infty]{} -\infty$$

alors que la limite devrait être $+\infty$ donc cette solution est exclue. Ainsi, on a

$$y = \operatorname{ch} x \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

ce qui signifie que $\operatorname{Argch} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$.

(c) On pose $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1,1[$ alors

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2}{(1-x)^2} \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

donc $f'(x) = \operatorname{Argth}'(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. On en déduit que les deux fonctions f et Argth diffèrent d'une constante sur l'intervalle $]-1,1[$ or on a

$$f(0) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = 0 = \operatorname{Argth}(0)$$

donc les fonctions f et Argth sont égales sur $]-1,1[$.